

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale de Physique et d'Astrophysique

pour l'obtention du

DIPLÔME de DOCTORAT

Spécialité : Physique Hadronique / Physique Théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Grégoire GOESSENS

Etude de la transition entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique dans le cadre d'un modèle effectif de la QCD : le modèle Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio

Soutenue le 26 Juillet 2012
devant la Commission d'Examen

Jury :

M.	D.	Davesne	Président du jury
Mme	F.	Gulminelli	Rapporteur
M.	J.	Aichelin	Rapporteur
M.	G.	Chanfray	Directeur de thèse
M.	H.	Hansen	Directeur de thèse
M.	P.	Costa	Examineur

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon-I

École doctorale de Physique et d'Astrophysique

pour l'obtention du

DIPLÔME de DOCTORAT

Spécialité : Physique hadronique / Physique théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Grégoire GOESSENS

Étude de la transition entre le plasma de
quarks et de gluons et la matière
hadronique dans le cadre d'un modèle
effectif de la QCD : le modèle
Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio.

devant le jury composé de

Dany DAVESNE

Président du jury

Francesca GULMINELLI

Rapporteuse

Joerg AICHELIN

Rapporteur

Guy CHANFRAY

Directeur de thèse

Hubert HANSEN

Directeur de thèse

Pedro COSTA

Examinateur

Résumé

Le plasma de quarks et de gluons (QGP) est un état de la matière observé lors de la collision d'ions lourds dans les accélérateurs tels que le LHC. Il est présent à haute température et/ou à haute densité, les quarks sont alors déconfinés : libres de se mouvoir et interagissant très peu entre eux. À basse température et basse densité, les quarks sont, au contraire, confinés dans les hadrons formant la matière hadronique ordinaire. La présence d'une transition entre cette phase hadronique et le QGP a des conséquences importantes que ce soit à haute température (expériences RHIC et LHC) ou à haute densité (expérience CBM à FAIR, étude des étoiles compactes).

Une première transition de phase est liée à la brisure de la symétrie chirale. Dans la matière hadronique, cette symétrie est brisée spontanément. Elle est restaurée en augmentant la température ou la densité. Au delà de la discussion habituelle sur la transition chirale, nous utiliserons un modèle, le modèle Polyakov Nambu Jona-Lasinio permettant de décrire une deuxième transition : la transition de déconfinement. Ceci permettra de séparer le diagramme Température-Densité en trois phases distinctes : la phase hadronique où les quarks sont confinés et où la symétrie chirale est brisée, la phase du QGP où les quarks sont déconfinés et où la symétrie chirale est restaurée et une phase hypothétique dite quarkyonique à basse température et haute densité où les quarks sont encore confinés mais où la symétrie chirale est restaurée.

On décrira, dans un premier temps les différentes transitions à l'aide des paramètres d'ordre suivant : le condensat de quark pour la transition chirale et la boucle de Polyakov pour le déconfinement. On verra ensuite comment l'évolution des fonctions spectrales des mésons sigma et pi peut nous renseigner sur le diagramme de phase. Le critère de transition chirale sera alors la différence entre les masses de ces mésons, la masse étant prise comme étant le maximum de la fonction spectrale. Le critère de transition de déconfinement sera, quant à lui, l'écart-type de la fonction spectrale. Enfin, nous verrons comment intégrer les mésons vecteurs au modèle, en particulier le méson ρ , qui pourra jouer le rôle de sonde du plasma, ses propriétés étant modifiées suivant le milieu dans lequel il est émis.

Mots-clefs : Plasma de quarks et de gluons, diagramme de phase de QCD, modèle NJL, boucle de Polyakov, transition de phase, fonctions spectrales, mésons.

Abstract

The quark and gluon plasma (QGP) is a state of matter observed in the collision of heavy ions in accelerators such as the LHC. It is formed at high temperature and / or high density, quarks are then deconfined : free to move and interacting very little with each other. At low temperature and low density, the quarks are, however, confined within hadrons forming the ordinary hadronic matter. The presence of the phase transition between hadronic matter and the QGP has observable consequences whatsoever at high temperature (RHIC and LHC experiments) or high density (FAIR experience, study of compact stars).

A first phase transition is linked to the chiral symmetry breaking. In hadronic matter, this symmetry is spontaneously broken. It is restored by increasing the temperature or the density. Beyond the usual discussion on the chiral transition, we use a model called Polyakov Nambu Jona-Lasinio for describing a second transition, the deconfinement transition. This allows to separate the temperature-density diagram in three distinct phases : the hadronic phase where quarks are confined and where chiral symmetry is broken, the phase of the QGP where quarks are deconfined and chiral symmetry is restored and a hypothetical phase called quarkyonic at low temperature and high density in which quarks are confined but where chiral symmetry is still restored.

We will describe, at first, the various transitions using the following order parameters : the quark condensate for the chiral transition and the Polyakov loop for the deconfinement one. Then we will see how the evolution of the spectral functions of sigma and pi mesons can provide information on the phase diagram. The chiral transition criterion will be the difference between the masses of these mesons, the mass being taken as the maximum of the spectral function. And the criterion for the deconfinement transition will be the standard deviation (also called variance) of the spectral function. Finally, we discuss how the vector mesons fit in the model, especially the ρ meson, which can act as a probe of plasma properties which are modified by the environment from which it is issued.

Keywords : Quark and gluon plasma, QCD phase diagram, NJL model, Polyakov loop, phase transition, spectral functions, mesons.

Table des matières

Remerciements	11
Introduction	13
I La physique du plasma de quarks et de gluons	17
1 Le plasma de quarks et de gluons	19
1.1 Le diagramme de phase température–potentiel-chimique	20
1.2 Les processus mis en jeu	21
1.3 Signatures du QGP dans les collisions d’ions lourds	23
1.3.1 Signatures indirectes	23
1.3.2 Signatures directes	27
1.3.3 Conclusion	29
2 Description de l’interaction forte	31
2.1 Symétries et représentations	31
2.2 Représentation adjointe	32
2.3 L’isospin	33
2.4 La voie octuple	33
2.5 Le modèle de Sakata	35
2.6 Le modèle de quarks	35
2.6.1 La symétrie de saveur	36
2.6.2 Contenu en saveur des hadrons	36
2.6.3 Introduction de la couleur	38
2.7 Électrodynamique quantique	39
2.8 Le lagrangien de QCD	40
2.9 La liberté asymptotique	42
2.10 Le confinement	44
2.11 Conclusion	44
3 Les calculs de QCD sur réseau	47
3.1 Présentation	47
3.2 La boucle de Polyakov	48

3.3	Conclusion	49
II Un modèle effectif de la QCD		51
4	Quels éléments pour fabriquer une théorie effective de QCD ?	55
4.1	Éléments de la théorie des transitions de phase	55
4.1.1	Le paramètre d'ordre	55
4.1.2	Brisure de symétrie	56
4.2	La symétrie chirale	56
4.2.1	Représentation des transformations de Lorentz par un bispineur	56
4.2.2	Transformation chirale	58
4.2.3	Brisures explicite et spontanée	60
4.3	Conclusion	60
5	Les bases du modèle Nambu–Jona-Lasinio	61
5.1	Le lagrangien de NJL	61
5.2	L'influence du champ moyen	62
5.2.1	L'équation de Dyson dans le modèle NJL	62
5.2.2	L'approximation de Hartree-Fock	64
5.2.3	Calcul de la self-energy dans l'approximation de Hartree- Fock	65
5.2.4	L'équation du gap	68
5.2.5	Le condensat de quarks	69
5.2.6	Le rôle de la constante de couplage	70
5.2.7	Conclusion	71
5.3	Calcul des quantités mésoniques	71
5.3.1	Le méson π	71
5.3.2	Calcul de m_π et de m_σ	74
5.3.3	Calcul de f_π	75
5.3.4	Choix et influence des paramètres	76
5.4	Introduction de la température et du potentiel chimique . . .	78
5.4.1	Le formalisme de Matsubara	78
5.4.2	Prise en compte du potentiel chimique	79
5.4.3	Modification de l'équation du gap	79
5.4.4	Étude de la transition chirale	80
5.4.5	Modification de l'intégrale de boucle et de la polarisation	80
5.4.6	Évaluation de l'intégrale de boucle par intégrale de Cauchy	82
5.5	Comportement des mésons à T et μ non nuls	83
5.5.1	La fonction spectrale	83
5.5.2	Détail du calcul de la masse	83
5.6	Conclusion	86

6	Apport d'éléments de QCD décrivant le confinement et description du modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio	87
6.1	Les bases du modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio	87
6.1.1	La boucle de Polyakov	87
6.1.2	La symétrie \mathbf{Z}_3	88
6.1.3	Le lagrangien de PNJL	89
6.1.4	Le potentiel effectif en pure jauge	89
6.2	Les calculs dans le modèle PNJL	91
6.2.1	Introduction du grand potentiel	91
6.2.2	Les équations de champ moyen	93
6.2.3	Le propagateur et les fonctions de distributions	94
6.2.4	Résumé de la procédure employée	95
6.3	Conclusion	95
III	Diagramme de phase de QCD dans le modèle PNJL	97
7	Tracé du diagramme de phase à l'aide des paramètres d'ordre	101
7.1	Étude des paramètres d'ordre	101
7.1.1	Évolution en fonction de la température et du potentiel chimique	101
7.1.2	Influence du schéma de coupure des intégrales	102
7.1.3	Influence du choix du potentiel effectif	103
7.1.4	Zone de métastabilité	105
7.1.5	Le point critique	108
7.1.6	Transition de déconfinement	110
7.2	Tracé des diagrammes de phase	114
7.2.1	Diagramme $T - \mu$ pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$	114
7.2.2	Diagramme $T - \mu$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$	115
7.2.3	Diagramme $T - \mu$ pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$	117
7.3	Conclusion	120
8	Tracé du diagramme de phase $T-\mu$ à l'aide des sondes mésoniques	123
8.1	Étude des fonctions spectrales	123
8.1.1	Tracé des fonctions spectrales du pion et du méson sigma	123
8.1.2	Interprétation de l'élargissement des fonctions spectrales	124
8.1.3	La masse des mésons	126
8.1.4	Étude des fonctions spectrales à haut potentiel chimique dans le modèle PNJL	126
8.2	Choix des critères de transition	131
8.2.1	La largeur de la fonction spectrale	133
8.2.2	Trajectoire dans le plan largeur-mi-hauteur - masse . .	134
8.2.3	L'écart-type comme critère de déconfinement	135

8.2.4	Trajectoire diagonale	136
8.2.5	Critères de début et de fin de la transition de déconfinement	138
8.3	Les diagrammes de phase tracé à partir des critères mésoniques	140
8.3.1	Diagramme de phase mésonique pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$	140
8.3.2	Diagramme de phase mésonique pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$	141
8.3.3	Diagrammes de phase mésonique pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$	141
8.3.4	Superposition des diagrammes de champ moyen et de quantités mésoniques	143
8.3.5	Tracé du diagramme de phase dans le cadre du modèle NJL	143
8.3.6	Résumé	145
8.4	Conclusion	146
IV	Prise en compte des mésons vecteurs	147
9	Le modèle PNJL élargi aux mésons vecteurs	151
9.1	Calcul de la masse du méson rho	151
9.1.1	Modification du lagrangien	151
9.1.2	Les fonctions de polarisation	151
9.1.3	Polarisation totale du méson ρ	152
9.1.4	Polarisation totale du méson a_1	153
9.1.5	Mélange des polarisations axiale et pseudoscalaire	153
9.1.6	Calcul explicite des polarisations à une boucle	154
9.1.7	Les masses des mésons π , ρ et a_1	155
9.2	Prise en compte des boucles de pion	156
9.2.1	Le vertex pion-quark-antiquark	156
9.2.2	Polarisation du méson ρ avec boucles de pion	157
9.2.3	Conclusion	158
	Conclusion	159
	Appendices	161
	A Transformations de Fierz	163
	B Pseudo-code du calcul de la température de début de la phase déconfinée	165
	C Calcul du diagramme à boucles de pion	167
C.1	Développement du produit	167
C.2	Calcul des traces	168
C.3	Calcul des intégrales	169

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Hubert Hansen qui dirigea cette thèse. Sa grande disponibilité, son écoute attentive, sa transmission de la passion de la recherche, ses messages d'encouragement et ses qualités humaines m'ont aidé à passer trois années des plus enrichissantes et des plus agréables. Le travail effectué à ses côtés et les nombreuses discussions que nous avons eues m'ont permis de goûter aux joies de la recherche et d'apprendre énormément sur les sujets abordés.

Je tiens également à remercier Guy Chanfray pour avoir accepté d'être le directeur officiel de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Francesca Gulminelli et à Joerg Aichelin pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit ainsi que pour leurs encouragements qui dans les derniers instants de rédaction furent très appréciables.

Je voudrais ensuite remercier Dany Davesne pour avoir accepté de présider le jury ainsi que pour ses encouragements.

Je tiens à remercier Pedro Costa pour avoir accepté de participer au jury, pour les différentes périodes de collaboration qui nous avons eues, en particulier dans la magnifique ville de Coimbra, ainsi que pour sa bonne humeur communicative.

Enfin, je tiens à remercier Hervé Halter pour m'avoir transmis la passion de la physique ainsi que Christophe Winisdoerffer et Sacha Davidson pour avoir encadré avec patience mes stages de L3 et de M1 respectivement.

Vient le moment de remercier tous ceux qui m'ont accompagné pendant ces trois ans et avec qui j'ai passé des moments inoubliables : Adriane C., Ahmad T., Amandine J., Ambre B., Amélie H., Amélie P., Annelise A., Antoine B., Aude B., Aurore D.L., Benjamin B., Bertille V., Bertrand S.L., Béryl B., Bogna K., Boris M., Bryan B., Camille G., Charlotte D., Claudie V., Clémence G., Delphine M., Denis J., Emmanuelle S., Émie B., Étienne S., Ferdinand F., Flavien P., Flavy J., François B., Gaëlle G., Grégory D., Grégory F., Hugo P., Jean-Baptiste C., Jennifer C., Jérémie L.P., Jérémy B., Jérémy C., Jérémy Z., Jessy E., Jonathan V., Julie C., Julien M., Julien P., Kevin G., Laure M., Laurie C., Loïc G., Lucas G., Manon N., Marine B., Martin L., Mathieu B., Matthieu T., Maxence B., Mesut A., Michael G.,

Myriam J., Nicolas B., Nicolas B., Pauline P., Pierre C., Rémy S., Robin J., Romain C., Romain S., Samuel C., Simon B., Sreekanth V., Stella M., Thierry D.L., Thomas A., Thomas B, Thomas C., Tiphaine H., Valérien P. et Vincent M.

Je tiens à remercier chaleureusement toute ma famille : Bastien, Camille, Chantal, Didier, Emmanuelle, Jean-Charles, Maud, Michael, Michel, Micheline, Norbert, Romain et Véronique.

Et bien sûr les trois personnes les plus chères à mes yeux : mon père, ma mère et mon frère.

Introduction

Le XXème siècle a connu de formidables avancées dans la recherche des constituants élémentaires de la matière ainsi que dans la compréhension de leurs comportements. Cette profusion de résultats expérimentaux et de modélisations théoriques a permis de construire un modèle décrivant avec une très haute précision les interactions élémentaires à la base de la plupart des phénomènes physiques observables. Ce modèle est appelé "modèle standard". Parallèlement, de nombreuses approches effectives ont été développées afin de décrire des milieux trop complexes pour être appréhendés à partir des seules interactions élémentaires. Ainsi, les théories basées sur des modèles effectifs ont connu un essor particulièrement marqué dans les domaines d'étude des différents états de la matière (solide, liquide, gaz, plasma électromagnétique mais aussi semiconducteur, supraconducteur, etc.) et parmi les différents domaines de description des comportements de la matière, celui des transitions de phase tient un rôle de premier plan.

Le modèle standard permet la description de trois interactions élémentaires sur les quatre formalisées en physique pour décrire le monde. L'interaction gravitationnelle n'est, en effet, pas décrite par des interactions de particules mais de manière géométrique dans le cadre de la théorie de la relativité générale. La première des trois interactions comprises dans le modèle standard est l'interaction électromagnétique à la base des phénomènes lumineux, électriques, magnétiques et de la totalité des forces usuelles, mise à part la force de gravité (pression, traction, contact, vent, etc.). La deuxième est appelée interaction faible et ne s'observe qu'au niveau nucléaire. Elle est responsable des désintégrations nucléaires à la base notamment du rayonnement solaire. Enfin, la troisième est celle qui nous intéresse au premier chef : elle a pour nom l'interaction forte.

Cette interaction est à l'origine de la cohésion des nucléons (neutrons et protons) au sein des noyaux atomiques ainsi que des quarks au sein de ces mêmes nucléons. Aux échelles de température et de densité usuelles, cette interaction n'a *a priori* aucune influence à grande échelle : elle disparaît rapidement avec la distance, les particules en présence quand le milieu est froid (baryons, mésons, etc.) étant neutres vis-à-vis de cette interaction. Lorsque le milieu est très chaud, comme c'est le cas lors des collisions ultra-relativistes d'ions lourds dans les expériences de type LHC, l'interaction

forte peut voir son rayon d'action croître sur des distances grandes devant les dimensions nucléaires. La description d'un tel milieu nécessite alors de considérer directement les objets concernés par l'interaction forte : les quarks et les gluons.

Ces particules, d'ordinaire confinées au sein des hadrons, se retrouvent alors libres d'interagir directement. Elles forment alors une soupe très chaude et très liquide appelée "plasma de quarks et de gluons". Ce nouvel état de la matière nécessite donc une description à la fois, en terme de particules élémentaires (à cause des énergies mises en jeu) et à la fois en terme d'outils de modèles effectifs (à cause du grand nombre de particules impliquées).

Ce travail s'inscrit ainsi dans l'étude du plasma de quarks et de gluons, en particulier dans l'exploration du diagramme de phase température-densité de la matière, diagramme occupé aux hautes températures par le plasma. Une attention particulière sera portée sur les transitions entre les différentes phases de ce diagramme, en particulier à grande densité, ainsi que sur la recherche de nouvelles phases éventuelles. Nous baserons cette étude sur un modèle inspiré de la théorie des supraconducteurs : le modèle Nambu–Jona-Lasinio.

Le plan de cet exposé sera donc le suivant.

Nous décrirons dans une première partie la physique du plasma de quarks et de gluons, d'abord sous l'angle expérimental avec la description du processus de formation du plasma et des procédés mis en œuvre pour son observation et ensuite sous l'angle théorique avec le rappel historique des différentes modélisations de l'interaction forte et l'introduction des calculs de chromodynamique quantique sur réseau.

Nous rappellerons dans une deuxième partie comment fut construit le modèle sur lequel se base cette étude : le modèle Nambu–Jona-Lasinio. Nous verrons que les calculs y sont effectués dans le cadre d'un champ moyen et permettent d'obtenir des informations sur les comportements des mésons π et σ . Nous aborderons l'extension de ce modèle aux cas de température et densité non-nulles puis l'apport d'un élément issu des calculs sur réseau : la boucle de Polyakov.

Dans une troisième partie, nous présenterons les résultats obtenus lors de cette étude, notamment l'évolution des paramètres d'ordre associés aux transitions étudiées et le tracé du diagramme de phase à l'aide de ces paramètres. Nous utiliserons ensuite des outils construits à partir des quantités mésoniques pour sonder ce diagramme.

Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous nous pencherons sur le cas des mésons vecteurs notamment le méson ρ et amorcerons une étude du comportement de cette particule lorsque la température varie.

Cette thèse fera l'objet de deux publications régulières,

"Detailed analysis of the phase diagram of the Polyakov – Nambu – Jona-Lasinio in the high density region"

G. Goessens, A. Gatti, H. Hansen, P. Costa, C. A. de Sousa, M. C. Ruivo

"In-medium mesonic correlations as a probe of the phase diagram of QCD : a detailed finite temperature and density study of the effective Nambu – Jona-Lasinio model coupled to the Polyakov loop"

G. Goessens, H. Hansen, P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa

et fait l'objet d'une publication dans un compte rendu de conférence

"Étude de la transition de phase entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique."

Rencontres jeunes chercheurs 2010 Annecy, 12 - 18 décembre 2010

G. Goessens.

Première partie

La physique du plasma de quarks et de gluons

Chapitre 1

Le plasma de quarks et de gluons

Lors des collisions ultrarelativistes de noyaux dans les accélérateurs d'ions lourds, tels que SPS au CERN, RHIC à Brookhaven, le LHC au CERN et prochainement CBM au FAIR, une boule de feu composée de gluons et de quarks déconfinés est formée. Ce milieu est appelé plasma de quarks et de gluons (QGP). Dans la matière nucléaire ordinaire, les quarks sont confinés dans les hadrons : soit dans les baryons composés de trois quarks ou de trois antiquarks, soit dans les mésons composés d'une paire quark-antiquark. La collaboration STAR à RHIC a défini le QGP comme "un état de la matière en équilibre thermique local dans lequel les quarks et les gluons sont déconfinés hors des hadrons de telle sorte que les degrés de liberté de couleur deviennent manifestes sur des volumes de la taille des noyaux et non plus seulement de celle des nucléons". [1]

Le comportement des quarks et des gluons est décrit par la chromodynamique quantique (QCD). Celle-ci prédit que les interactions sont de faible intensité à grande énergie et de forte intensité à faible énergie. Ainsi, lorsque l'énergie d'interaction est faible, le couplage α_s est trop grand pour étudier le système par une approche perturbative. On a alors recours à des méthodes non perturbatives basées sur des modèles effectifs ou des simulations numériques pour faire des prédictions. D'autre part, lorsque l'énergie devient grande, par exemple dans un milieu chaud, les quarks interagissent moins et plus rien ne les force à rester sous la forme de hadrons. L'énergie séparant les deux domaines est notée Λ_{QCD} et vaut environ 200 MeV.

On espère trouver du plasma de quarks et de gluons dans les milieux très denses, au coeur des étoiles compactes par exemple. On pense, également, que l'univers était, durant ses premières microsecondes, dans un état suffisamment dense et chaud pour que le QGP se formât [2]. La transition vers la matière hadronique se serait ensuite produite à mesure que la température et la densité baissaient. Ainsi, l'établissement du diagramme de phase

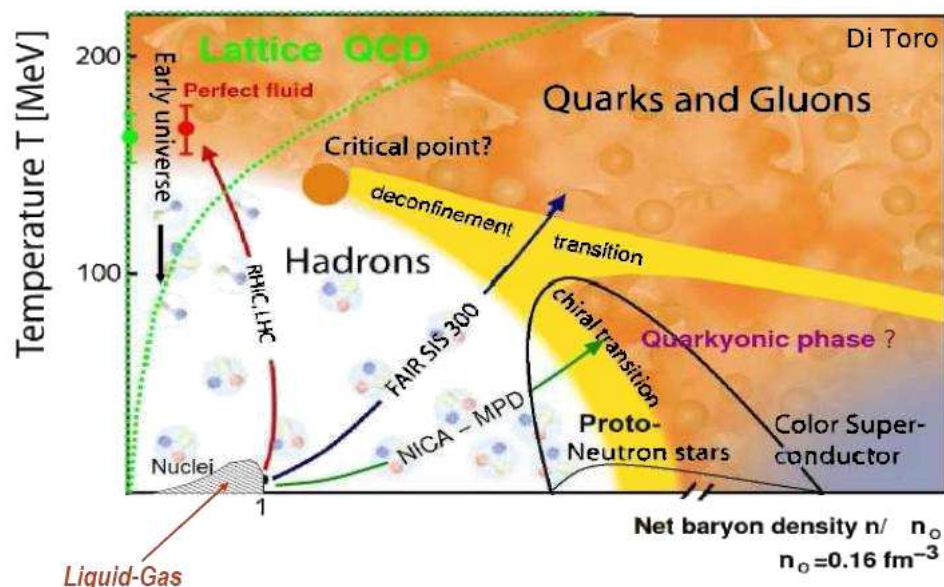


FIG. 1.1 – Diagramme de phase schématique de QCD (Di Toro)

température-densité (ou température-potentiel chimique) est un enjeu majeur, tant théorique qu'expérimental et est au cœur des études actuelles du QGP [3].

1.1 Le diagramme de phase température–potentiel-chimique

Sur la figure 1.1 est représenté le diagramme de phase schématique de la matière aux hautes échelles de température et de densité. Deux phases sont représentées : la phase hadronique à basse température et basse densité, la phase de plasma de quarks et de gluons à haute température et une éventuelle phase parfois appelée "quarkyonic" à haute densité et basse température. Sont également représentées les trajectoires suivies lors de diverses expériences de collision : LHC, FAIR, etc. Ces trajectoires partent toutes de la zone de la matière nucléaire, de température quasiment nulle comparée à Λ_{QCD} et de densité égale à la densité nucléaire normale, et traversent la phase hadronique pour amener le système dans d'autres phases.

Les deux transitions de phase apparaissant ici sont la transition chirale et la transition de déconfinement. Elles sont représentées en jaune sur le diagramme. La transition chirale est liée à la symétrie chirale qui est brisée dans la phase hadronique et restaurée dans le plasma. Cette transition change d'ordre au point critique, point dont la position est un sujet de recherche actif. La deuxième transition étudiée est celle du déconfinement.

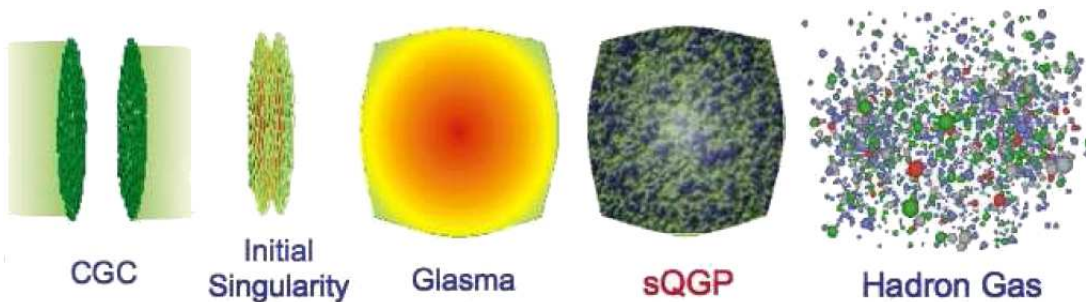


FIG. 1.2 – Illustration d’une collision de noyau par Stephen Bass

Les quarks sont, en effet, confinés dans la phase hadronique et déconfinés dans le QGP [4, 5, 6]. On verra que ces transitions ne coïncident pas à haute densité, ce qui amène à considérer l’existence d’une troisième phase à haute densité et basse température.

La détermination de l’état dans lequel se trouve la matière peut se faire par calcul sur réseau. La zone délimitée par les pointillés verts représente le domaine où les calculs sur réseau sont possibles aujourd’hui. On constate que cette zone est restreinte aux basses densités. L’utilisation d’autres méthodes sera donc nécessaire pour explorer le reste du diagramme.

1.2 Les processus mis en jeu

Lors d’une collision d’ions lourds, le QGP formé se refroidit rapidement en se dispersant et en rayonnant diverses particules dont l’observation permet de sonder le plasma. Le processus est schématisé figure 1.2. Juste avant la collision, les noyaux sont représentés par des disques à cause de la contraction de Lorentz et l’on suppose qu’ils sont bien décrits par la théorie du Color-Glass-Condensate (CGC), puis vient la singularité de la collision, un milieu appelé glasma contenant des tubes de flux électromagnétiques se forme ensuite [7], puis, le système se thermalisant, le plasma apparaît et enfin l’hadronisation se produit donnant naissance à un gaz de hadrons.

L’illustration d’une collision de l’expérience STAR à RHIC est donnée figure 1.3. Un très grand nombre de particules sont détectées autour du point de collision et on reconstruit leurs trajectoires de manière à récupérer des informations sur le milieu formé après la collision.

Un moyen efficace de décrire le processus de refroidissement et de dispersion est de se placer dans le diagramme de Minkowski. Sur la figure 1.4, on représente l’évolution spatio-temporelle de la collision de deux noyaux de plomb. Avant la collision, les noyaux se dirigent l’un vers l’autre à très grande vitesse. On suppose que très peu de temps (1 fm/c) après la collision le QGP est formé, les quarks sont alors déconfinés et la symétrie chirale est

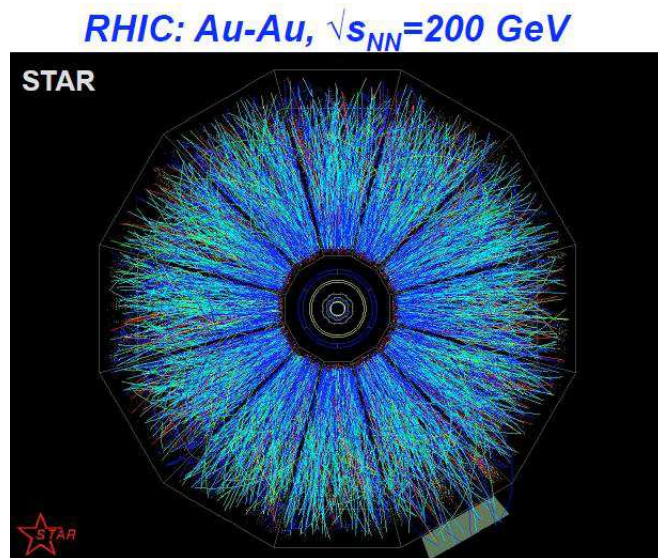


FIG. 1.3 – Illustration d’une collision de l’expérience de RHIC

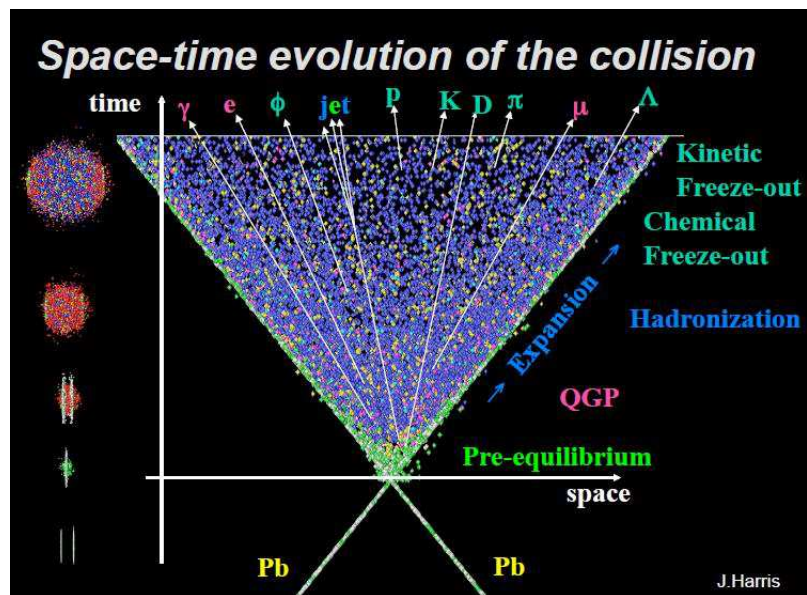


FIG. 1.4 – Diagramme schématique de la collision (J. Harris)

restaurée. Le milieu subit ensuite un refroidissement et une expansion ce qui aura pour conséquence le reconfinement des quarks dans les hadrons et la brisure de la symétrie chirale [8]. On repasse alors dans la phase hadronique. C'est le processus nommé hadronisation. Se produit ensuite le gel (ou *freeze-out*) chimique : les collisions entre hadrons ne modifient plus la nature de ceux-ci : seuls des échanges d'énergie-impulsion ont lieu, la composition en particules est alors fixée. Puis, survient le gel thermique, on peut alors extraire la température, désormais fixée, en ajustant un simple facteur de Boltzmann $e^{-\beta m_i}$ (où m_i est la masse des hadrons détectés) sur les abondances mesurées. Tout au long du processus, de nombreuses particules sont émises : photons, leptons, baryons, mésons... Certaines d'entre elles voient leurs propriétés (masse, largeur...) modifiées dans le plasma. Elles vont donc pouvoir servir de sondes permettant d'obtenir des informations sur ce milieu.

1.3 Signatures du QGP dans les collisions d'ions lourds

On présente dans cette section, de manière non-exhaustive, quelques sondes utilisées. Le plus simple pour obtenir une signature intéressante est de chercher une manifestation du plasma dans les observables prenant une valeur très différentes si le milieu est seulement hadronique ou s'il contient du plasma (il existe des signaux plus élaborés). On s'intéresse ainsi à la valeur que prend l'observable en question dans une collision proton contre noyau, où l'on suppose que le plasma ne s'est pas formé, et on la compare avec la valeur dans une collision entre deux noyaux lourds où l'on espère avoir formé du plasma. Si l'on obtient des différences inexplicables dans le cadre de processus purement hadroniques, on peut considérer avoir obtenu une preuve de la formation du plasma. Cette démarche nécessite une grande fiabilité des modèles hadroniques utilisés et un choix pertinent des observables étant donnée la très faible durée de vie du plasma éventuellement formé ainsi que ses dimensions extrêmement réduites entraînant un risque que les effets de sa formation soient totalement noyés dans le bruit de fond des processus hadroniques. Il convient enfin, de prendre en compte la possible formation du QGP dans les collisions noyaux-nucléons si l'énergie est suffisamment grande.

1.3.1 Signatures indirectes

Une première catégorie de signatures peut être recueillie à partir de l'état final du système. Ce sont les sondes indirectes issues des hadrons de faibles impulsions ($p_T < 2 \text{ GeV}/c$) [9]. Elles permettent de remonter à la composition chimique du système après gel chimique via la mesure des abondances de particules. Cette composition est susceptible d'être modifiée en cas de

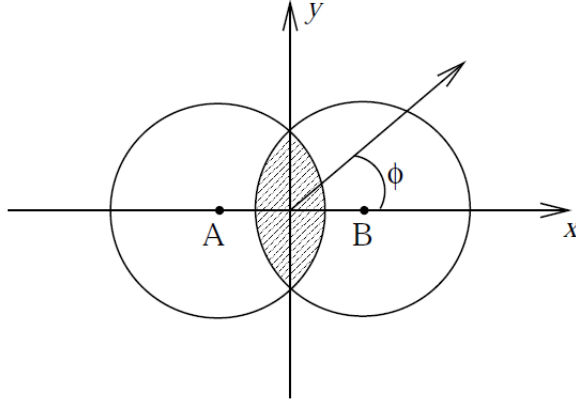


FIG. 1.5 – Schéma d'une collision non centrale d'ions lourds [11]

formation du QGP.

Parmi ces signatures indirectes, une mesure expérimentale typiquement dépendante du modèle employé est le flot elliptique.

Le flot elliptique

Les mesures de l'état final permettent de remonter à la pression du milieu formé après la collision. Cela passe par l'étude des spectres et des anisotropies du moment transverse [10] donnant des indications sur la dynamique d'expansion, le degré d'équilibre cinétique ainsi que le degré de collectivité, le tout permettant d'obtenir des informations sur la pression. Une donnée utile pour cela est le flot elliptique. Considérons une collision non centrale comme représentée sur la figure 1.5. Les constituants des noyaux acteurs de la collision sont répartis de manière non sphérique et forment une figure en amande. L'axe z perpendiculaire au plan de la figure est celui de la trajectoire des ions. L'angle ϕ est l'angle azimutal d'une particule éjectée. Dans le cas où les particules sont en forte interaction, l'anisotropie des positions initiales des acteurs de la collision (en gris sur la figure) entraîne une anisotropie des impulsions de ces partons. Le flot elliptique défini par $v_2 = \langle \cos(2\phi) \rangle$ est alors non nul. Sur la figure 1.6, on observe que le flot elliptique sature à haute énergie quelle que soit la particule concernée. C'est le signe qu'une thermalisation précoce a été atteinte [12]. On constate que les différents flots ne saturent pas à la même valeur pour les différents hadrons. Toutefois, si l'on trace les flots normalisés aux nombres de quarks de valence en fonction de l'énergie cinétique transverse par quark, les courbes coïncident, voir figure 1.7. Cela indique que les degrés de libertés pertinents quand la thermalisation se produit sont les quarks déconfinés et non les hadrons. Il existe d'autres variables calculées à partir de la dynamique du

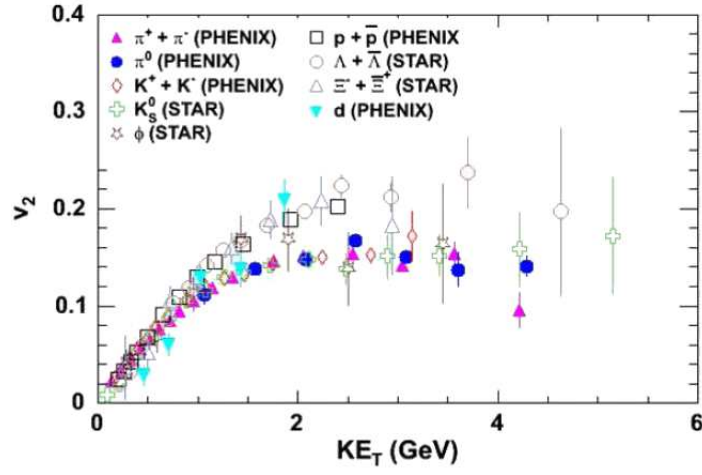


FIG. 1.6 – Flot elliptique de différents hadrons en fonction de l'énergie transverse KE_T [12]

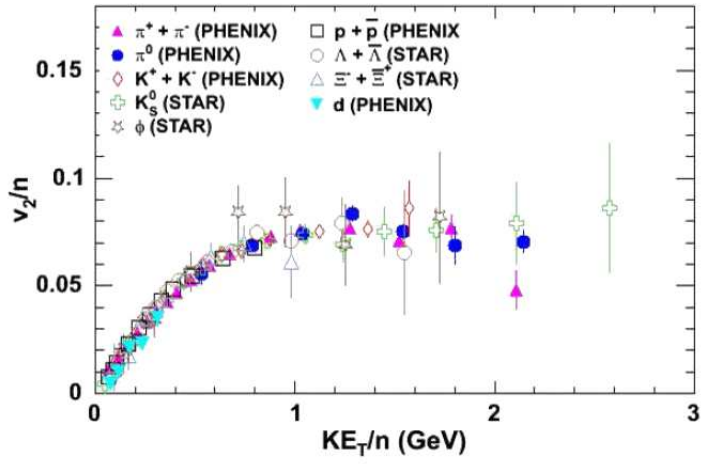


FIG. 1.7 – Flot elliptique normalisé en fonction de l'énergie transverse par quark [12]

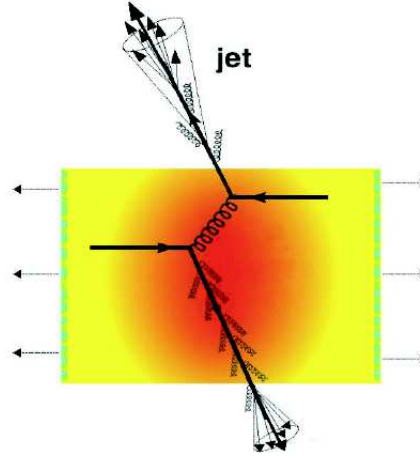


FIG. 1.8 – Schéma d'une situation propice au jet quenching [18]

milieu comme sa viscosité qui peuvent fournir des informations sur la nature de ce milieu [13, 14].

Le jet quenching

D'autres signatures indirectes peuvent également venir des hadrons issus de collisions dures entre partons au tout début de la réaction. Lorsque deux particules très énergétiques émergent d'une collision entre deux particules incidentes, elles hadronisent lors de l'expansion en un amas de hadrons appelé jet. L'énergie perdue par ces jets n'est pas la même suivant que le milieu traversé soit un gaz de hadron ou un plasma. En effet, dans le QGP, la forte densité de gluons produit une forte atténuation du jet appelée "jet quenching" [15, 16, 17]. Sur la figure 1.8, on schématise l'émission de deux partons lors d'une collision, le plasma est représenté en orange. Le jet partant vers le haut traverse une faible portion de plasma et n'est que peu affecté. Le jet partant vers le bas subit, lui, une forte atténuation du fait d'une plus longue trajectoire à travers le plasma. On trace figure 1.9 le nombre d'évènements en fonction de l'angle azimutal pour deux jets corrélés. On constate, dans le cas d'une collision proton-proton et d'une collision proton-noyau, la présence d'un jet arrière, situé à un angle de π par rapport au jet principal. Ce jet est supprimé pour une collision noyau-noyau, signe de la formation d'un QGP.

Le facteur de modification nucléaire : R_{AA}

Les particules générées par une collision d'ions lourds subissent de lourdes pertes d'énergie à cause des collisions de particules dans le milieu dense.

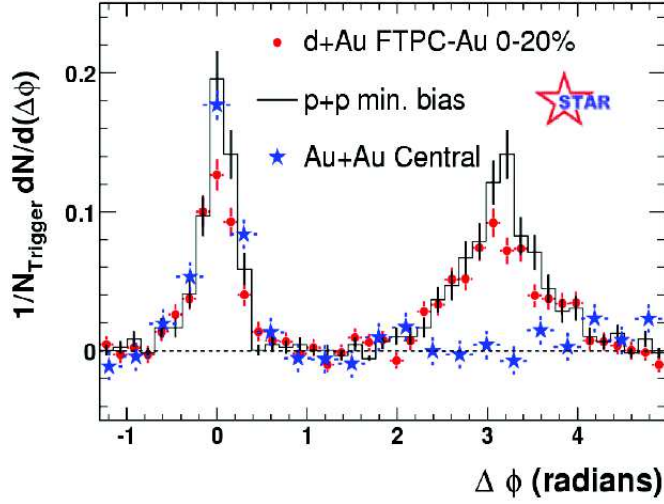


FIG. 1.9 – Événements corrélés azimutalement pour des collisions proton-proton en noir, proton-noyau en rouge et noyau-noyau en bleu [12]

Un sonde efficace pour étudier cet effet est la réduction du nombre de hadrons détectés. L'observable correspondante est le facteur de modification nucléaire R_{AA} , défini comme le rapport entre le rendement de hadrons dans le cas de collisions entre ions lourds et celui dans le cas de collisions proton-proton. Sur la figure 1.10, on trace R_{AA} en fonction de l'impulsion transverse. Si le résultat de la collision entre ions pouvait se ramener à la somme des résultats de collisions entre les nucléons constitutants, R_{AA} serait égal à 1 quelle que soit l'impulsion. On observe une forte suppression notamment autour de 6 GeV indiquant le fait que la collision noyau-noyau ne peut être décrite comme la superposition de collisions des nucléons mis en jeu.

Autres phénomènes observés

On s'intéresse également au temps de vie du système qui dépend également de la dynamique : il est plus élevé si une phase de plasma est formée [20]. Enfin la transition de phase peut engendrer des phénomènes critiques comme des fluctuations d'entropie ou de densité d'énergie en fonction de la rapidité [21] ou comme des "désorientations" de condensat chiral [22].

1.3.2 Signatures directes

On espère pouvoir recueillir des sondes émises directement depuis le plasma et n'ayant pas interagi avec le milieu hadronique ultérieur. Parmi celles-ci, se trouvent les sondes "dures" à cause du haut transfert d'impulsion à l'origine de leur création. Ce sont des sondes émises très peu de temps

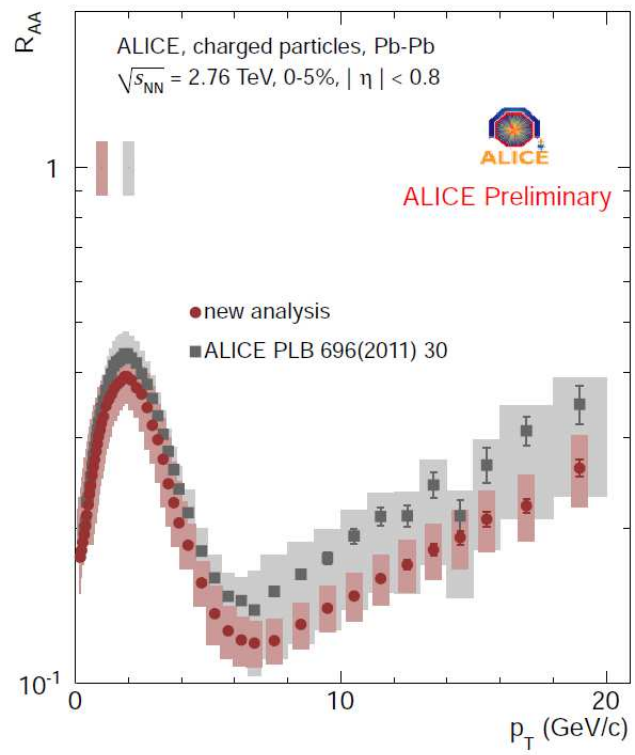


FIG. 1.10 – R_{AA} en fonction de l'impulsion transverse pour un énergie de 2,76 GeV [19]

après la collision, elles sont donc susceptibles de naître dans le plasma et de voir leurs propriétés modifiées par ce milieu.

Une première conséquence directe de la présence de plasma est une augmentation de la largeur de résonance des mésons vecteurs ρ , ω , ϕ . Cela se traduit par un excès de dileptons e^+e^- et $\mu^+\mu^-$ dans les régions de masse autour des masses des mésons pour les collisions noyau-noyau par rapport aux collisions proton-noyau [23]. Parmi ces mésons, le ρ est intéressant car particulièrement sensible au plasma, sa durée de vie étant inférieure à celle du QGP.

Le plasma est également susceptible de produire plus de radiations de photons qu'un gaz de hadrons, toutefois cette conséquence est très difficile à mettre en évidence à cause du bruit de fond venant de la désexcitation des mésons π^0 et η et de l'annihilation $\pi^+\pi^-$ [24].

Par ailleurs, toujours concernant les sondes leptoniques, les états liés de quarks charmés $c\bar{c}$ comme le J/Ψ subissent quant à eux une suppression à cause du plasma [25, 26].

1.3.3 Conclusion

Nous avons présenté succinctement certaines observations expérimentales permettant indirectement via des modèles effectifs appropriés de mettre en évidence la présence du plasma de quarks et de gluons. Transformer ces signaux expérimentaux en estimations quantitatives se révélera compliqué étant données les difficultés qu'il y a à modéliser les phénomènes mis en jeu. Attardons-nous sur les différentes théories ayant pour objet l'interaction au cœur de ces processus mis en jeu dans le plasma : l'interaction forte.

Chapitre 2

Description de l'interaction forte

Ce que nous observons, ce n'est pas la Nature en soi,
mais la Nature exposée à notre méthode d'investigation.
Werner Heisenberg

L'existence de l'interaction forte fut suggérée afin d'expliquer la cohésion des noyaux atomiques. En effet, sans cette force attractive, la répulsion électromagnétique entre protons empêcherait toute stabilité nucléaire. Protons et neutrons se comportant de manière identique vis-à-vis de cette interaction, on décrit le proton et le neutron comme deux états d'un même objet : le nucléon, ce qui est conforté par le très faible écart de masse entre les deux particules : $m_{proton} = 938,27 \text{ MeV}$ et $m_{neutron} = 939,57 \text{ MeV}$.

La symétrie sous-jacente à cette identification est la symétrie d'isospin. Elle est basée sur le groupe $SU(2)$ dont la représentation fondamentale admet pour objets le proton et le neutron. On notera par la suite ce groupe $SU_V(2)$, l'indice V faisant référence au caractère vectoriel de la transformation. Ce groupe est, en effet, associé à la conservation du courant vectoriel d'isospin.

2.1 Symétries et représentations

Lorsque les lois physiques régissant un système (par exemple un condensateur électrique) sont invariantes sous un groupe de transformations (par exemple, le groupe des rotations autour de l'axe vertical), on dit que le système vérifie la symétrie associée à ce groupe. Les transformations du système induisent, par ailleurs, des transformations de quantités physiques modélisant le système (par exemple le champ électrique, le champ magnétique, la charge électrique, etc). On représente alors les transformations du système par les transformations induites sur les quantités physiques : à

chaque rotation r du système, on associe la transformation $T(r)$ d'une quantité physique et pour que T réalise une représentation fidèle, on lui impose d'être un homomorphisme. Une représentation est, en effet, définie comme une application associant à chaque élément d'un groupe une transformation.

Différentes représentations du groupe sont possibles, ce qui engendre l'existence de différents types de quantités physiques se transformant linéairement. Par exemple, à la représentation triviale (tous les éléments du groupe sont représentés par l'identité), on associe les quantités scalaires (charge électrique, norme du champ électrique, etc.). Ces quantités sont des invariants vis-à-vis des rotations. Elles se transforment, en effet, via l'identité.

Une autre représentation possible du groupe de rotation est la représentation matricielle $SO(3)$: à chaque rotation, on associe une matrice du groupe de Lie $SO(3)$. Les quantités physiques associées sont alors les vecteurs (champ électrique, vecteur position d'un point du condensateur, etc.) et tournent en même temps que le système.

2.2 Représentation adjointe

Il est également possible de représenter le groupe de transformations par l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie. On parle alors de représentation adjointe, la représentation par le groupe de Lie étant appelée représentation fondamentale.

Dans l'exemple $SO(3)$, l'algèbre de Lie associée, $so(3)$, est générée par J_1 , J_2 et J_3 :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

vérifiant les relations de commutations suivantes :

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k. \quad (2.2)$$

Ces relations de commutation sont centrales pour la recherche de représentations, en effet, tout jeu de trois matrices hermitiennes vérifiant ces relations forme une représentation du groupe des rotations. C'est le cas des matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

plus précisément de $\{\frac{\sigma_1}{2}; \frac{\sigma_2}{2}; \frac{\sigma_3}{2}\}$. On construit ainsi une représentation du groupe des rotations par le groupe $SU(2)$ s'appliquant à des objets à deux

composantes appelés spineurs. De manière générale [27], on peut trouver une représentation de dimension quelconque de ce groupe et traditionnellement, on considère une dimension de valeur $2j + 1$, j étant appelé le spin de la représentation et prenant une valeur entière ou demi-entière.

2.3 L'isospin

Comme évoqué précédemment, on décrit le proton et le neutron comme les composantes d'un même objet, le nucléon, qu'on décrit mathématiquement par l'isospineur χ :

$$\chi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

On définit alors l'isospin comme un degré de liberté interne au nucléon, le proton et le neutron étant les projections "haut" et "bas" de l'isospin. Une transformation d'isospin peut être représentée par une transformation de χ par U un élément de $SU(2)$: $\chi' = U\chi$. Le nucléon est ainsi l'objet associé à la représentation fondamentale des transformations d'isospin. La représentation adjointe consiste à considérer les rotations $SO(3)$ appliquées à un triplet identifié au triplet de pions [28], [29] :

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

La théorie de l'interaction forte est alors construite de manière à respecter la symétrie d'isospin observée expérimentalement. L'introduction du concept de nucléon accompagné d'un degré de liberté interne qu'est l'isospin permet ainsi de construire une théorie traitant le proton et le neutron de manière symétrique.

2.4 La voie octuple

Si j'avais prévu ça, j'aurais fait de la botanique.
Wolfgang Pauli

Afin de classer le nombre croissant de particules, dont certaines ayant des durées de vie étrangement longues, un nouveau nombre quantique, l'étrangeté, est introduit [30] [31]. On passe alors d'une représentation par le groupe $SU(2)$ à une représentation par le groupe $SU(3)$. Ceci permet d'établir une classification des hadrons : les baryons avec un moment cinétique total égal à $1/2$ ainsi que les mésons avec un moment cinétique total nul ($J = 0$) sont rangés en octet de $SU(3)$: Fig. 2.1.

Les baryons de moment cinétique total égal à $3/2$ sont rangés en décuplet de $SU(3)$: Fig. 2.2.

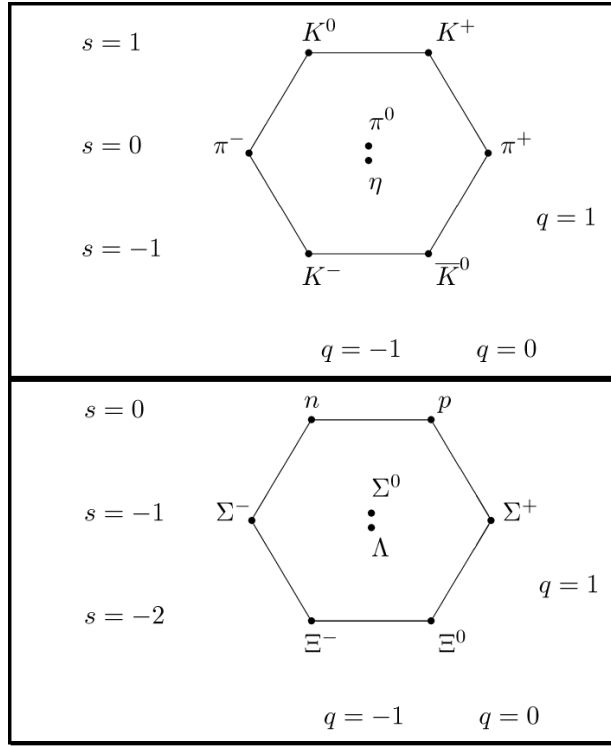


FIG. 2.1 – En haut : l’octet des mésons et en bas : l’octet des baryons. s représente l’étrangeté et q la charge électrique. (Creative Commons)

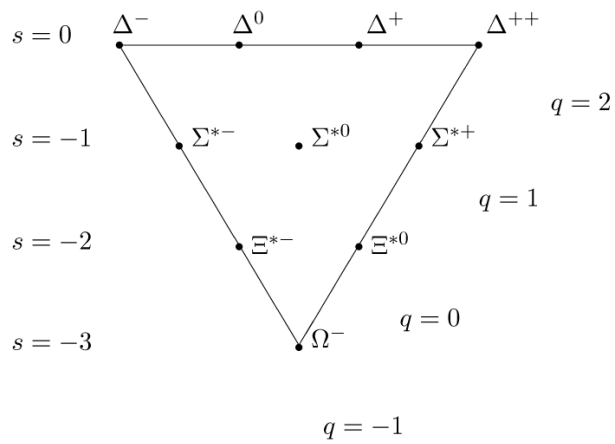


FIG. 2.2 – Décuplet des baryons. (Creative Commons)

2.5 Le modèle de Sakata

Une telle variété de hadrons encouragea la recherche d'un modèle décrivant ces particules comme étant des combinaisons de particules élémentaires et permettant de retrouver les structures d'octet et de décuplet précédentes. Sakata [32] proposa ainsi de construire l'ensemble des hadrons à partir du triplet t : proton p , neutron n et lambda Λ :

$$t = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

La théorie était construite de manière à être invariante sous transformation $SU(3)$ du triplet t :

$$t' = Ut \quad (2.7)$$

avec $U \in SU(3)$, ceci étant justifié par le faible écart de masse entre p , n et Λ . L'intérêt d'un tel modèle consiste à décrire les mésons comme des états liés constitués d'une de ces trois particules et d'une des trois antiparticules correspondantes. Le K^+ est, par exemple, identifié à l'état lié $p\bar{\Lambda}$.

L'intérêt du groupe $SU(3)$ réside en la décomposition des produits tensoriels des représentations fondamentale et conjuguée en sommes directes de représentations irréductibles. La représentation fondamentale associée à chaque élément de $SU(3)$ la transformation du triplet t décrite par l'équation 2.7. L'objet transformé ayant trois composantes, on la note formellement **3**. La représentation conjuguée est, quant à elle, notée $\bar{\mathbf{3}}$. On a les décompositions suivantes [33] :

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (2.9)$$

avec **1** la représentation triviale associée aux transformations des scalaires et **8** et **10** les représentations de dimensions supérieures associées respectivement aux transformations des octets et des décuplets. On associe alors l'octet des mésons à la représentation **8** apparaissant dans 2.8.

Un méson est ainsi vu comme un objet se transformant de la même façon qu'une composition d'un élément du triplet et d'un élément de l'anti-triplet. La complexité de la description des baryons dans ce modèle était telle qu'une modification de taille dut être faite rapidement. Le nouveau modèle qui en découla invoqua l'existence de nouveaux objets appelés quarks.

2.6 Le modèle de quarks

Three Quarks for Muster Mark!
James Joyce

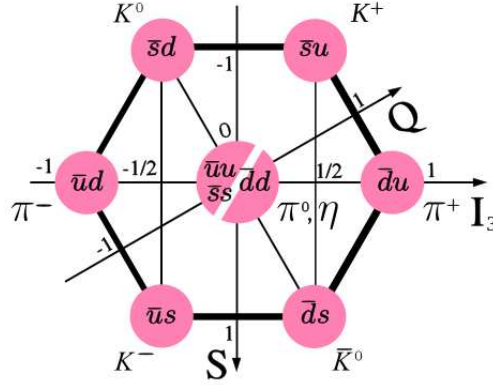


FIG. 2.3 – Contenu en quarks de l’octet des mésons de spin 0. (Creative Commons)

2.6.1 La symétrie de saveur

Murray Gell-Mann proposa en 1964 [34], de considérer les hadrons comme des états liés ou résonants, non pas de particules déjà identifiées, mais de nouvelles particules de spin $1/2$ et de charges $-e/3$ ou $2e/3$ avec e la charge de l’électron. Gell-Mann nomma ces particules des ”quarks” et les réunit en un triplet de manière analogue au modèle de Sakata. Les deux premières composantes furent nommées up (u) et down (d) par analogie avec l’isospin up et down du proton et du neutron. La troisième fut nommée étrange (s : strange en anglais) car entrant dans la composition des hadrons étranges. Les trois composantes sont désignées sous le terme de saveurs et la symétrie $SU(3)$ appliquée au triplet réalise une généralisation de la symétrie d’isospin : la symétrie de saveur. Cette symétrie, basée sur le groupe, $SU_f(3)$ (f comme *flavour* : saveur en anglais) et appliquée au triplet de quark permet de retrouver les structures des multiplets de hadrons en considérant les baryons comme des états à trois quarks et les mésons comme des états formés d’un quark et d’un anti-quark.

2.6.2 Contenu en saveur des hadrons

Les figures 2.3, 2.4 et 2.5 indiquent le contenu en quarks des multiplets décrits précédemment, Q représente la charge, I_3 la projection de l’isospin et S l’étrangeté : un quark s comptant pour 1 et un antiquark \bar{s} pour -1 , ce à quoi on peut ajouter l’octet des mésons de spin 1 représenté Fig.2.6. Les masses supposées des quarks u , d et s étant relativement proches les unes des autres, la symétrie $SU_f(3)$ est quasiment respectée et les partenaires des multiplets ont des masses proches à quelques exceptions près, justifiées par des mécanismes de brisures spontanées de symétrie et d’instantons.

La découverte de nouveaux hadrons a conduit à poser l’existence de

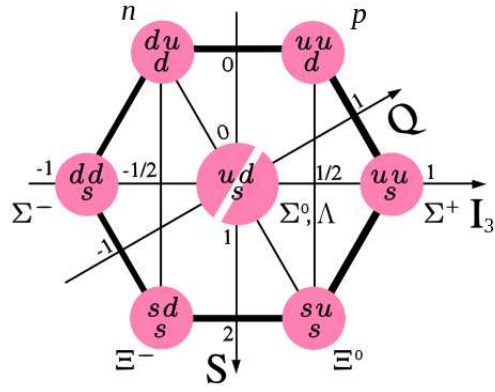


FIG. 2.4 – Contenu en quarks de l'octet des baryons. (Creative Commons)

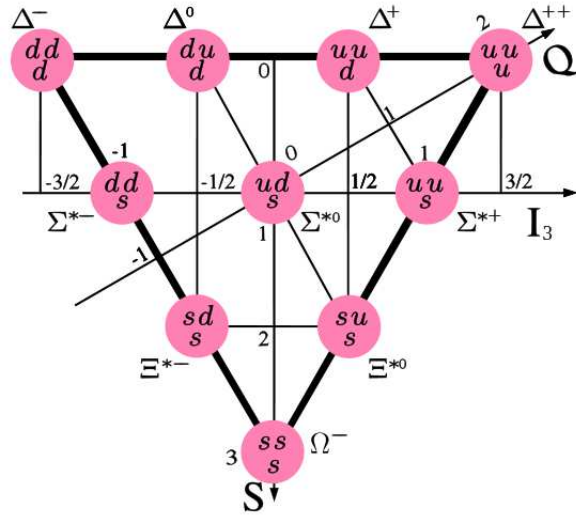


FIG. 2.5 – Contenu en quarks du decuplet des baryons. (Creative Commons)

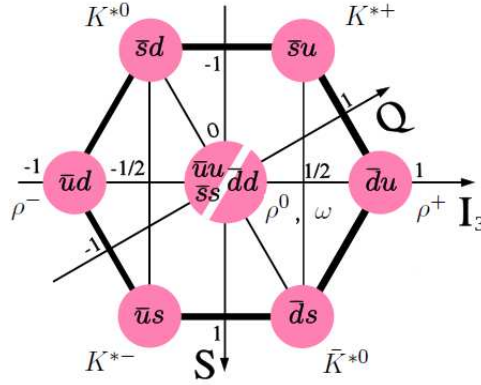


FIG. 2.6 – Contenu en quarks de l’octet des mésons de spin 1 (Creative Commons)

saveurs supplémentaires : c , b et t . Les masses élevées de ces nouveaux quarks rendent inintéressante la prise en compte des symétries d’ordres supérieurs $SU(4)$, $SU(5)$ et $SU(6)$. La symétrie $SU_f(3)$, bien que légèrement brisée, a permis de construire un modèle rendant compte du nombre croissant de hadrons découverts ainsi que de leur organisation en multiplets.

2.6.3 Introduction de la couleur

Afin d’expliquer la détection des baryons Ω^- et Δ^{++} présents dans le décuplet Fig.2.5 et de garantir l’antisymétrie de leur état, un nouveau nombre quantique est ajouté à la description. En effet, ces baryons sont constitués de 3 quarks de même saveur et de même spin. Ils ne respectent donc pas le principe d’exclusion de Fermi à moins de supposer l’existence d’un nouveau nombre quantique : la couleur. Chaque quark q est alors décrit comme un triplet de couleur :

$$q = \begin{pmatrix} q_{\text{bleu}} \\ q_{\text{rouge}} \\ q_{\text{vert}} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

se transformant sous $SU_c(3)$ (c comme couleur) et constituant la représentation fondamentale de la symétrie de couleur des hadrons. Les hadrons sont des objets invariants sous $SU_c(3)$ et c’est sur cette symétrie interne que sera basée la théorie décrivant leurs interactions : la chromodynamique quantique.

La chromodynamique quantique (QCD) est une théorie de jauge lagrangienne construite de manière analogue à l’électrodynamique quantique (QED). Commençons donc par décrire cette dernière.

2.7 Électrodynamique quantique

La QED a pour objet de base l'électron. Elle se construit à partir du lagrangien correspondant à la propagation d'un électron libre :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) \quad (2.11)$$

avec $\Psi(x)$ un bispineur de Dirac associé au champ de l'électron au point d'espace-temps x et γ^μ une matrice 4×4 appelée matrice de Dirac et vérifiant la relation d'anticommutation : $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$, η étant la métrique de Lorentz $(1, -1, -1, -1)$, $\mathbb{1}$ la matrice identité de l'espace des matrices complexes 4×4 et $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Ce qui caractérise l'interaction électromagnétique est l'invariance du lagrangien et donc des observables sous la transformation :

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-iq\theta}\Psi(x) \quad (2.12)$$

Chaque transformation de déphasage ainsi définie est associée à un élément de $U(1)$: $e^{-i\theta}$. Lorsque le lagrangien est invariant sous cette transformation, on dit que la symétrie $U(1)$ est respectée. L'objet de base de la théorie possède donc un degré de liberté interne, ici une phase. Cela va nous permettre de décrire les interactions qu'il subit.

Le principe des théories de jauge consiste alors à passer d'une invariance globale à une invariance locale en permettant à θ de prendre une valeur différente en chaque point. On modifie alors l'équation 2.12 en faisant dépendre θ de x :

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\Psi(x). \quad (2.13)$$

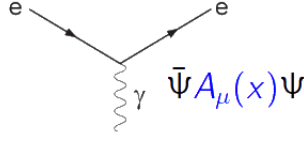
La dérivée ∂_μ doit alors être remplacée par une dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieqA_\mu$, ceci afin de garantir l'invariance du lagrangien sous 2.13, A_μ se transformant de la manière suivante :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \quad (2.14)$$

Le lagrangien devient :

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi(x). \quad (2.15)$$

Le champ de jauge vectoriel A_μ , après ajout d'un terme cinétique, sera associé au photon qui joue le rôle de médiateur de l'interaction électromagnétique. Apparaît alors un terme $\bar{\Psi}A_\mu\Psi$ dans le lagrangien. Ce terme permet de décrire le vertex $e\gamma e$ et donc l'émission où l'absorption d'un photon par un électron. On associe à ce vertex le diagramme de Feynman suivant :



Enfin, pour que la description soit complète, on ajoute un terme de propagation du photon au lagrangien. On pose $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et on réécrit le lagrangien sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

On a ainsi construit une théorie conciliant électromagnétisme et mécanique quantique dans un cadre relativiste.

2.8 Le lagrangien de QCD

De la même manière qu'en QED, on décrit d'abord la propagation du fermion libre qui est ici le quark :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)q(x). \quad (2.17)$$

Dans ce cas, la symétrie de jauge n'est pas basée sur le groupe $U(1)$ mais sur le groupe $SU_c(3)$ dont les éléments agissent sur le triplet de couleur que constitue le quark :

$$q_f^\alpha \rightarrow (q_f^\alpha)' = U_\beta^\alpha q_f^\beta. \quad (2.18)$$

Chaque saveur de quark q_f définit un triplet de couleur, α et β sont les indices de couleurs, f l'indice d'isospin ou de saveur et U une matrice de $SU(3)$ qu'on peut écrire sous la forme [35] :

$$U = \exp\left(-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \theta_a\right) \quad (2.19)$$

où les λ^a sont les huit générateurs de l'algèbre de Lie du groupe $SU(3)$ représentés par les matrices de Gell-Mann, θ_a des paramètres et g_s la constante de structure de l'interaction forte.

On constate sur 2.18 que la saveur n'est pas affectée par les transformations de couleur $SU(3)$ générant l'interaction forte : l'interaction forte est indépendante de la saveur. Le passage de l'invariance globale à l'invariance locale amène à nouveau à réécrire le lagrangien en ajoutant une dérivée covariante :

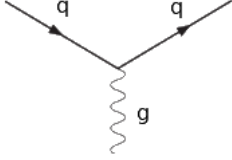
$$D^\mu = \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_a^\mu. \quad (2.20)$$

Le champ de jauge A^μ correspond cette fois-ci aux gluons. Les transformations de l'octet A^μ (l'indice a allant de 1 à 8) forment la représentation adjointe du groupe $SU(3)$.

Le nouveau lagrangien :

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{q}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)q(x) \quad (2.21)$$

fait intervenir le terme $-ig_S G_a^\mu \bar{q}^\alpha \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} q^\beta$ auquel on associe le vertex quark-gluon-quark :



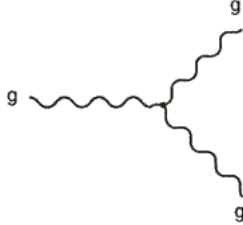
Le tenseur permettant la description de la propagation du boson de jauge a une forme plus compliquée qu'en QED à cause de la non-commutativité du champ de jauge G^μ :

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \quad (2.22)$$

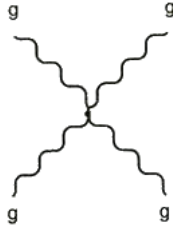
f^{abc} étant les constantes de structure de l'algèbre de Lie de $SU(3)$. Le lagrangien devient ainsi :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)q(x) - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (2.23)$$

Apparaissent alors des vertex à trois gluons :



ainsi que des vertex à quatre gluons :



On calcule alors l'action associée à ce lagrangien, puis les fonctions de Green en terme des champs de gluons et de quarks grâce au formalisme de l'intégrale des chemins [36]. Puis, on rajoute des termes de fixation de jauge au lagrangien pour éviter les divergences au sein de ce formalisme et des termes de fantômes de Fadeev-Popov pour garantir la covariance de la fixation de jauge [37]. Enfin, grâce aux fonctions de Green, on calcule les observables associées aux interactions fortes.

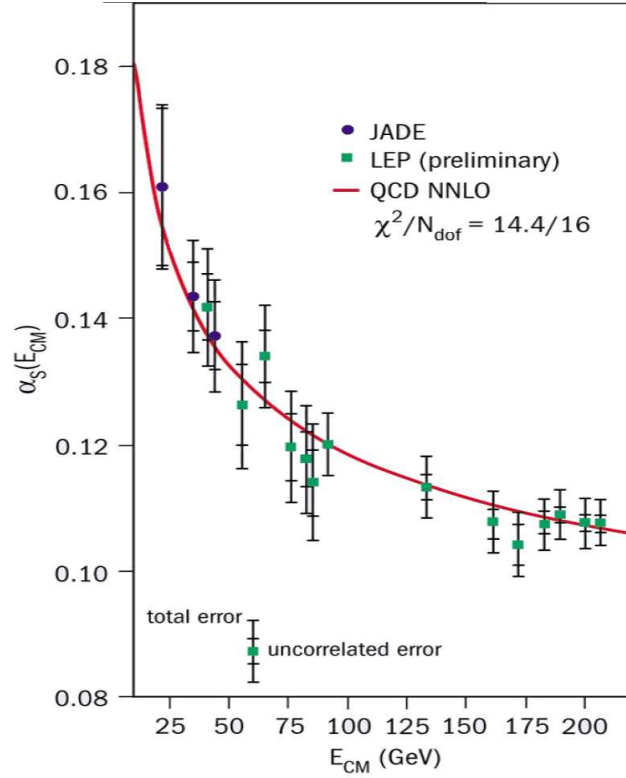


FIG. 2.7 – Évolution de α_S en fonction de l'énergie d'interaction dans le centre de masse E_{CM} . Les ronds et les carrés correspondent aux mesures expérimentales et le trait plein au calcul de QCD au *next-to-next-to-leading-order* (c'est-à-dire au deuxième ordre en développement de α_S) [38].

2.9 La liberté asymptotique

Lors du calcul d'une observable physique à partir des propagateurs de gluons et de quarks, toutes les boucles du diagramme de Feynman correspondant à l'observable doivent être prises en compte. La procédure permettant d'exprimer les quantités physiques observables à partir des paramètres "nus" de la théorie (c'est à dire des champs de gluons et de quarks "libres" apparaissant dans le lagrangien) s'appelle la renormalisation. Elle fait intervenir une échelle d'énergie μ qu'on appelle point de renormalisation et dont vont dépendre les fonctions de Green, la constante de couplage et les masses des quarks. Ce paramètre μ peut être interprété comme l'énergie du processus en question. La dépendance de la constante de couplage de l'interaction forte α_S en μ permet ainsi de prédire l'intensité de l'interaction en fonction de l'énergie du processus.

On constate figure 2.7 que la constante de couplage décroît lorsque l'énergie d'interaction augmente. Lorsque l'énergie d'interaction devient gran-

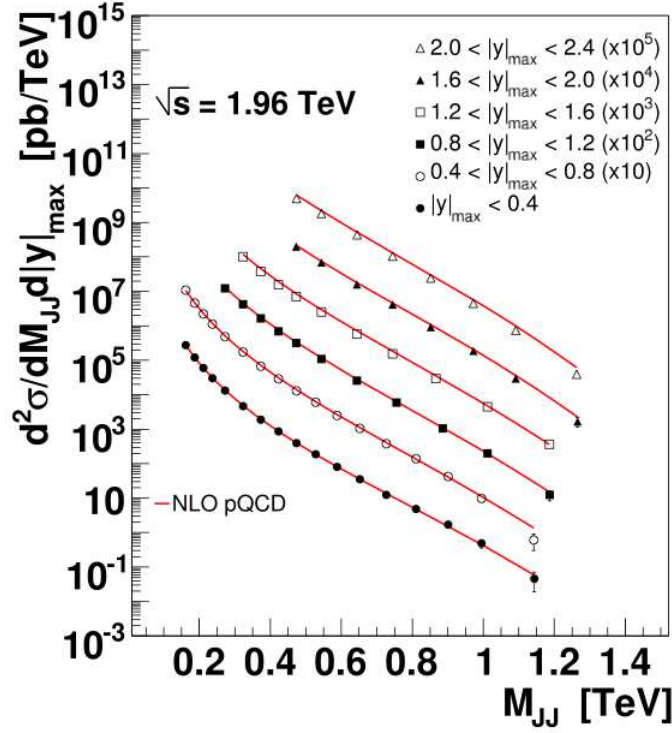


FIG. 2.8 – Dérivée de la section efficace par rapport à la masse invariante et à la rapidité en fonction de la masse invariante pour différentes fenêtres de rapidité lors d’une collision proton-antiproton à 1.96 TeV . Les points correspondent aux mesures expérimentales et les traits pleins aux prédictions théoriques de la QCD au *next-to-leading-order* [38].

de devant les échelles d’énergie hadronique, la constante de couplage tend vers zéro. Les quarks n’interagissent alors que très peu entre eux. On relie ce phénomène à la liberté asymptotique stipulant qu’on peut isoler des états d’entrée et de sortie avant et après l’interaction. Un développement perturbatif en puissances de α_S est alors réalisable et des prédictions peuvent être tirées directement de la QCD.

La figure 2.8 montre le très bon accord entre les prédictions de la QCD et les mesures expérimentales concernant la dépendance de la section efficace en M_{JJ} , la masse invariante, lors d’une collision proton-antiproton [38].

Ce domaine perturbatif où les calculs approchés sont très proches de la valeur exacte ne s’étend pas à la zone de basse énergie d’interaction, *i.e.* en dessous de Λ_{QCD} . Dans cette zone, la constante de couplage est trop grande pour qu’un développement perturbatif soit permis. Les quarks interagissent alors fortement entre eux et sont confinés au sein des hadrons. Λ_{QCD} est

défini par la relation suivante :

$$g^2(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{QCD})} \quad (2.24)$$

avec g la constante de couplage, Q l'impulsion du processus et β_0 le premier terme du développement de $\beta(g)$: $\beta(g) = -\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5$, $\beta(g)$ étant défini par : $\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}$, μ étant l'échelle de renormalisation.

Avec la liberté asymptotique, l'autre aspect marquant de la physique de la QCD est le confinement.

2.10 Le confinement

Il convient de distinguer, d'une part, la liaison des quarks à basse énergie due à la forte valeur de la constante de couplage et d'autre part, le confinement défini rigoureusement à partir d'une symétrie interne de couleur. Ce confinement de couleur interdit la détection de particules colorées donc de quarks. Seuls les états blancs, c'est-à-dire symétriques sous $SU(3)_c$ sont observables. Ces états correspondent aux hadrons.

Aucune vérification du confinement en QCD n'a été effectuée par un calcul non perturbatif. La transition entre les domaines confiné et déconfiné formera l'une des deux transitions à l'étude dans ces travaux. Le domaine déconfiné est celui du plasma de quarks et de gluons et correspond aux hautes énergies et plus précisément aux hautes températures et aux hautes densités tandis qu'à basse énergie, on retrouve la matière hadronique ordinaire. Dans ces conditions, le développement perturbatif de la QCD ne s'applique plus. On a alors recours à d'autres méthodes telles que les calculs sur réseau ou des modèles effectifs basés sur les symétries de la QCD comme c'est le cas du modèle Nambu–Jona-Lasinio (NJL) et son extension : le modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) que nous allons présenter.

Dans ces modèles, nous ne pouvons parler de confinement que d'une façon approchée : le modèle NJL permet seulement une interprétation du confinement en terme d'interaction : le pion est, par exemple, décrit comme un état lié à température nulle. Le modèle PNJL, quant à lui, même s'il va plus loin grâce à la boucle de Polyakov, ne fournit qu'une description statistique du confinement. Le confinement de couleur de la QCD n'est donc jamais complètement décrit dans cette étude.

2.11 Conclusion

On a vu de quelle manière les théories de l'interaction forte ont peu à peu gagné en cohérence et en précision jusqu'à aboutir à la chromodynamique quantique. Cependant cette théorie, bien que d'une précision aujourd'hui

encore incontestée, donne difficilement des résultats analytiques dans des milieux où les interactions se produisent à des énergies faibles devant Λ_{QCD} . Un des moyens d'effectuer les calculs est alors de se placer sur un réseau.

Chapitre 3

Les calculs de QCD sur réseau

3.1 Présentation

Dans le domaine où les calculs perturbatifs ne sont plus applicables à cause de la trop grande valeur de la constante de couplage, on peut mettre en place des méthodes numériques. Ces méthodes sont basées sur une discrétisation de l'espace-temps. Les calculs sont alors effectués sur le réseau obtenu par la discrétisation d'où le nom de "QCD sur réseau".

On associe aux objets de la théorie des objets mathématiques : le quark et l'antiquark sont représentés par des bispineurs de Dirac : ψ et $\bar{\psi}$ et le gluon par un quadri-vecteur A_μ . Les valeurs moyennes des observables sont alors calculées grâce à l'action $S(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{O} e^{iS(A_\mu, \psi, \bar{\psi})}}{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS(A_\mu, \psi, \bar{\psi})}}. \quad (3.1)$$

Les intégrales en question sont ici des intégrales de chemin et sur réseau, ces chemins suivent l'espace-temps discrétisé en intervalles de taille " a " appelé le pas du réseau. L'action prend alors une valeur différente à chaque "noeud" du réseau.

Afin de préserver l'invariance de jauge, *a priori* brisée par la discrétisation, on introduit la variable de lien $U(x, y)$. Si une transformation de jauge transforme $\psi(x)$ en $V(x)\psi(x)$, alors $U(x, y)$ est transformée en $V(x)U(x, y)V^\dagger(y)$ de manière à conserver l'invariance de jauge locale, on peut alors réécrire l'action grâce aux variables de lien. $U(x, y)$ a un rôle analogue à celui de la dérivée covariante et s'utilise plus facilement sur un réseau discrétisé. Il s'exprime en fonction du champ A_μ de la manière suivante [39] :

$$U(x, y) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_x^y dx_\mu A_\mu(x) \right] \quad (3.2)$$

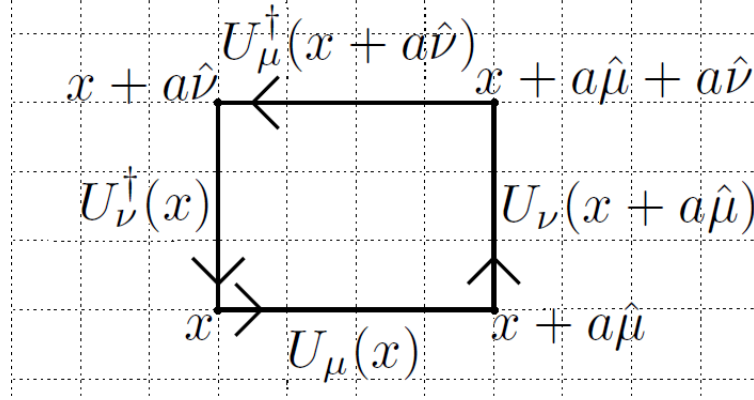


FIG. 3.1 – Un exemple de boucle de Wilson.

\mathcal{P} étant l'opérateur d'ordination de chemin (*path-ordering*) et g la constante de couplage de QCD.

L'action de jauge s'exprime ensuite à l'aide de boucles construites avec les variables de lien $U(x, y)$. Ces boucles sont appelées "boucle de Wilson" et leur utilisation permet de garantir l'invariance de jauge. Un exemple est donné figure 3.1 où l'on trace la boucle $W(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$. Ce qui nous intéresse est le diagramme de phase température-potentiel chimique, on a donc besoin d'un objet construit dans le cadre de l'équilibre thermodynamique grand canonique. Le calcul de la fonction de partition à température finie fera ainsi intervenir une boucle de Wilson particulière : la boucle de Polyakov.

3.2 La boucle de Polyakov

La boucle de Polyakov est une boucle de Wilson calculée dans le cadre d'un réseau euclidien où l'on a imposé des conditions de périodicité sur la variable temporelle. Le formalisme euclidien permet de faire des calculs à l'équilibre à température finie. L'inverse de la température du système est alors noté β . Dans un modèle de pure jauge, la fonction de partition d'un système de gluons en présence de quarks statiques s'écrit alors :

$$Z_Q(\beta, \vec{x}) = \int \mathcal{D}[A, \psi, \bar{\psi}] e^{-S_{purejauge} L(\vec{x})}. \quad (3.3)$$

avec $L(\vec{x})$ la boucle de Polyakov définie de la manière suivante :

$$L(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \exp \left[ig \int_0^\beta dx_4 A_4(\vec{x}, x_4) \right], \quad (3.4)$$

N_c étant le nombre de couleur et Tr_c la trace sur la couleur.

Nous verrons plus en détail, dans les chapitres suivants, la manière dont la température et la boucle de Polyakov sont utilisées pour décrire le plasma. Cet objet servira de paramètre d'ordre pour la transition de déconfinement. On verra que la boucle de Polyakov est sensible à la brisure spontanée de la symétrie de jauge que l'on peut lier au déconfinement.

3.3 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons vu que de nombreuses indications expérimentales permettaient de supposer la formation d'un plasma de quarks et de gluons lors des collisions d'ions lourds dans les accélérateurs. Pour décrire ce milieu, plusieurs options s'offrent alors à nous. La première est d'utiliser la théorie donnant les prédictions les plus précises sur la matière interagissant fortement : la QCD. Malheureusement, cette théorie n'est pas applicable aux échelles d'énergie concernée. Une deuxième option est de discrétiser l'espace-temps et d'effectuer, comme nous venons de l'aborder, des calculs sur réseau. Enfin, une troisième option consiste à utiliser des modèles effectifs.

Deuxième partie

Un modèle effectif de la QCD

Les calculs analytiques étant impossibles à basse énergie et la QCD sur réseau étant limitée au domaine de très faible potentiel chimique, l'utilisation de modèles effectifs s'impose pour décrire le diagramme de phase $T - \mu$. On se limitera à des systèmes dont la dynamique est contenue dans le lagrangien de la QCD.

À part pour quelques règles de somme, il est aujourd'hui difficile de tirer de la QCD des informations concernant les propriétés de basse énergie des hadrons de manière analytique. La théorie des perturbations ne permet effectivement pas de calculer des quantités telles que les masses hadroniques, les largeurs de résonances ou les longueurs de diffusion. Dans le cadre de l'étude de la transition entre matière hadronique et plasma de quarks et de gluons, un modèle effectif sera utilisé : le modèle Nambu–Jona-Lasinio (NJL) ainsi que l'une de ses extensions : le modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL).

Le modèle NJL a d'abord été introduit afin de décrire les interactions entre nucléons et incorpore désormais les quarks comme degrés de liberté. Un aspect essentiel de ce modèle est qu'il est construit avec un lagrangien respectant la symétrie chirale présente en QCD.

Chapitre 4

Quels éléments pour fabriquer une théorie effective de QCD ?

4.1 Éléments de la théorie des transitions de phase

D'après la théorie de Ginzburg-Landau, on peut fabriquer une théorie effective à partir d'une théorie plus globale en se basant sur les symétries du lagrangien initial ainsi qu'en incorporant des paramètres d'ordre décrivant la transition.

4.1.1 Le paramètre d'ordre

Ce qui caractérise une transition de phase est la discontinuité ou la divergence de certaines propriétés du système lors de la petite modification d'un paramètre. Le passage d'une phase à l'autre s'accompagne souvent d'un changement de symétrie. La phase ordonnée, en règle générale celle de basse température, est moins symétrique que la phase désordonnée : c'est l'apparition de l'ordre qui provoque la perte de symétrie. Cette perte est décrite grâce à une variable appelée "paramètre d'ordre" qui prend une valeur nulle dans la phase symétrique et non nulle dans la phase ordonnée. Lorsque le groupe de symétrie de la phase ordonnée (de basse température) est un sous-groupe de celui de la phase symétrique (de haute température), on peut utiliser la classification de Landau selon laquelle la transition est de premier ordre si le paramètre est discontinu et de second ordre s'il est continu et que sa dérivée diverge. Lorsque le paramètre est continu et qu'aucune divergence de sa dérivée n'apparaît, on parlera d'une transition de type *crossover*, le paramètre en question n'est alors plus, à proprement parler, un paramètre d'ordre mais seulement une donnée caractérisant l'évolution du *crossover*. On peut quand même définir une ligne de transition dans le dia-

gramme de phase pour ce dernier cas, en prenant comme point de transition le point où la dérivée du paramètre est extrémale. On peut se permettre d'utiliser plusieurs critères pour caractériser la transition. Ce qui importe est alors que les différents critères convergent lorsque le *crossover* devient une véritable transition de phase.

4.1.2 Brisure de symétrie

Lorsque l'état de plus basse énergie d'un système ne possède pas la symétrie complète de l'espace ou du hamiltonien décrivant les interactions, on dit que la symétrie est brisée *spontanément*. Ce type de brisure est à opposer à la brisure explicite se produisant lorsqu'il existe, dès le départ, un terme brisant la symétrie dans le hamiltonien ou dans le lagrangien de la théorie. Selon le théorème de Goldstone [40], lors d'une brisure spontanée de symétrie continue, il apparaît une excitation de masse nulle appelée *boson de Goldstone*.

Un des aspects centraux du modèle que nous allons présenter est la brisure d'une symétrie particulière : la symétrie chirale.

4.2 La symétrie chirale

Pour décrire cette symétrie, intéressons-nous aux représentations du groupe de Lorentz.

4.2.1 Représentation des transformations de Lorentz par un bispineur

Les isométries de l'espace de Minkowski forment un groupe : le groupe de Poincaré. Il contient les translations spatio-temporelles, les symétries miroir, le renversement du temps ainsi que les transformations de Lorentz, ces dernières contenant les rotations de l'espace et les *boosts*. Le sous-ensemble des transformations conservant l'orientation de l'espace forme, après exclusion des translations, un sous-groupe qui peut être représenté par le groupe $SO(3,1)$ des matrices réelles, 4×4 , orthogonales et de déterminant 1, la notation $(3,1)$ faisant référence à la préservation de la métrique minkowskienne contenant trois - et un +. Ce groupe est appelé le groupe des transformations propres de Lorentz. On représente ainsi une transformation de l'espace-temps (ici une transformation propre de Lorentz) par la transformation d'un objet (ici un quadri-vecteur) : $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, avec $\Lambda \in SO(3,1)$. Or la fidélité de la représentation (condition d'homomorphisme) repose sur la loi de multiplication du groupe (ici $SO(3,1)$), elle même déterminée par l'algèbre de Lie de ce groupe. Caractérisons donc cette algèbre.

Elle admet pour générateurs, J_1, J_2, J_3 : les trois générateurs de rotations et K_1, K_2, K_3 : les trois générateurs de boosts.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les relations de commutation entre ces générateurs sont les suivantes :

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \end{cases} \quad (4.1)$$

En posant,

$$\begin{cases} L_i = \frac{1}{2}(J_i + K_i) \\ R_i = \frac{1}{2}(J_i - K_i), \end{cases} \quad (4.2)$$

on a :

$$\begin{cases} [L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \\ [R_i, R_j] = i\epsilon_{ijk}R_k \\ [L_i, R_j] = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

On construit ainsi deux jeux de matrices L_i et R_i permettant de générer l'algèbre de Lie de $SO(3, 1)$, vérifiant l'équation 2.2 et commutant l'un avec l'autre. On peut donc représenter les transformations propres de Lorentz par $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$. Chaque groupe $SU(2)$ engendre une représentation étiquetée par un entier ou demi-entier qu'on notera ici j_1 et j_2 . La représentation la plus simple est celle de spin 0 ($j_1 = j_2 = 0$) : elle correspond à la transformation des scalaires. La suivante, qui est celle qui nous intéresse est celle de spin $\frac{1}{2}$: soit $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = 0$ et la représentation est notée $(\frac{1}{2}; 0)$, soit $j_1 = 0$ et $j_2 = \frac{1}{2}$: la représentation est alors notée $(0; \frac{1}{2})$. Elles correspondent aux transformations des spineurs de spin $\frac{1}{2}$. Les représentations $(\frac{1}{2}; 0)$ et $(0; \frac{1}{2})$ ne sont pas équivalentes : elles sont échangées l'une en l'autre par réflexion des trois axes d'espace, c'est-à-dire par parité.

Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux observateurs inversés spatialement (c'est-à-dire transformés l'un en l'autre par parité). Si \mathcal{O}_1 attribue à un objet un spineur se transformant sous $(\frac{1}{2}; 0)$, alors \mathcal{O}_2 attribuera à cet objet un spineur se transformant sous $(0; \frac{1}{2})$: si \mathcal{O}_1 voit un spineur gauche Ψ_L , \mathcal{O}_2 voit un spineur droit Ψ_R . Ceci explique les noms gauche et droit donné aux jeux de transformations L_i et R_i . On note que ces deux jeux de transformations sont transformés l'un en l'autre par parité [41].

4.2.2 Transformation chirale

Lorsque l'observateur \mathcal{O}_1 voit un spineur gauche, on dit aussi qu'il voit un champ de chiralité gauche. La chiralité d'une particule est ainsi définie comme la représentation du groupe des transformations propres de Lorentz : la représentation $(\frac{1}{2}; 0)$ correspond à une chiralité gauche et $(0; \frac{1}{2})$ à une chiralité droite.

Réécrivons la partie fermionique du lagrangien de QCD en terme des champs de chiralité gauche et droite [42], [43]. On se restreindra à deux saveurs de quarks u et d . Ainsi, Ψ comportera deux composantes d'isospin :

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

où u et d peuvent être décomposés en deux spineurs L et R dans la représentation de Weyl : $u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} d_L \\ d_R \end{pmatrix}$.

On construit des champs de chiralité gauche et droite à partir de Ψ en utilisant les projecteurs P_L et P_R :

$$\Psi_L = P_L \Psi = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi, \quad \Psi_R = P_R \Psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi \quad (4.5)$$

avec $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. On vérifie, en effet, que $\Psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \\ d_L \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les propriétés des projecteurs : $P_R + P_L = 1$; $P_R P_L = 0$ et $P_R^2 = P_R$ on obtient l'égalité $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$ ce qui permet de réécrire la partie fermionique du lagrangien de QCD :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ferm} &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\Psi = i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R \\ &\quad - \bar{\Psi}_R \hat{m} \Psi_L - \bar{\Psi}_L \hat{m} \Psi_R, \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec $\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$.

Remarquons que cette modification, n'étant qu'une réécriture, n'affecte pas l'invariance du lagrangien sous la transformation baryonique :

$$U_V(1) : \Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi. \quad (4.7)$$

On notera qu'ici la conservation du nombre baryonique est respectée pour chaque saveur.

On définit alors la transformation chirale comme l'application de deux éléments différents du groupe $SU(2)$ aux chiralités gauche et droite. C'est donc une transformation basée sur le produit tensoriel $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$. Les deux transformations en question sont les suivantes :

$$\begin{aligned} SU_L(2) : \Psi_L &\rightarrow e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}} \Psi_L, \Psi_R \rightarrow \Psi_R \\ SU_R(2) : \Psi_R &\rightarrow e^{i\beta_k \frac{\tau_k}{2}} \Psi_R, \Psi_L \rightarrow \Psi_L \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec $\alpha_{1,2,3}$ et $\beta_{1,2,3}$ des paramètres réels et $\tau_{1,2,3}$ les matrices de Pauli agissant dans l'espace d'isospin à deux composantes. Les courants associés à ces transformations sont respectivement $L_\mu = \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \Psi_L$ et $R_\mu = \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \Psi_R$. La symétrie chirale est respectée lorsque le lagrangien est invariant sous cette transformation. C'est le cas pour \mathcal{L}_{ferm} dans la limite où $m_u = m_d = 0$. Cette limite est appelée la limite chirale.

Les transformations chirales peuvent être séparées en deux catégories : les transformations vectorielles et les transformations axiales. Celles-ci s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} SU_V(2) : \Psi &\rightarrow e^{i\theta_k \frac{\tau_k}{2}} \Psi \\ SU_A(2) : \Psi &\rightarrow e^{i\eta_k \gamma_5 \frac{\tau_k}{2}} \Psi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Les courants associés [44] sont cette fois-ci $V_\mu = L_\mu + R_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$ et $A_\mu = L_\mu - R_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi$. On peut donc écrire $SU_L(2) \otimes SU_R(2) = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$.

Dans le cas où l'on a $m_u = m_d = m_0$ mais $m_0 \neq 0$, la symétrie chirale $SU_L(2) \otimes SU_R(2) = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ est brisée en $SU_V(2)$. En effet, le lagrangien est alors invariant sous $SU_V(2)$ mais pas sous $SU_A(2)$. La symétrie résultante, $SU_V(2)$ est la symétrie d'isospin. Rappelons que c'est cette dernière qui nous a permis pour $N_f = 3$ de classer les baryons en multiplets dans la voie octuplet. Au final, et que ce soit pour deux ou trois saveurs, $U_V(1) \otimes U_A(1) \otimes SU_V(N_f) \otimes SU_A(N_f)$ est brisé en $U_V(1) \otimes SU_V(N_f)$, $U_A(1)$ étant brisée par l'anomalie axiale et $SU_A(N_f)$ par le fait que la masse des quarks est non nulle.

Le respect de $SU_V(2)$ implique l'égalité des masses de π^+ , π^- et π^0 : on pourra désormais évoquer ce triplet en terme d'une seule particule : le méson π . Remarquons que le fait que m_u soit, en réalité, légèrement différent de m_d entraîne une petite brisure de $SU(2)$ qui explique la différence de masse entre les éléments du triplet de pion. Pour la suite de cette étude, on se placera toujours dans le cas où $m_u = m_d$.

4.2.3 Brisures explicite et spontanée

On remarque que c'est le terme de masse qui brise la symétrie chirale. Si $m_0 \neq 0$, la brisure est explicite, c'est-à-dire réalisée au niveau du lagrangien. L'autre type de brisure, la brisure spontanée, apparaît lorsque la symétrie est respectée par le lagrangien mais pas par l'état fondamental. Pour faire apparaître une brisure spontanée, on va construire un modèle effectif de la QCD respectant la symétrie chirale de manière quasi-exacte : m_0 aura une valeur très faible devant les masses hadroniques. Ainsi, la brisure explicite sera très faible et le principal mécanisme de brisure sera spontané. On verra que le paramètre d'ordre associé à cette brisure est le condensat de quark $\langle \bar{q}q \rangle$.

4.3 Conclusion

Les ingrédients à notre disposition pour construire un modèle effectif sont donc la transition de phase chirale et les quarks comme degrés de liberté du système. On construira donc un lagrangien qui possède la symétrie chirale et qui introduit une interaction effective, ceci posant les bases du modèle Nambu–Jona-lasinio. On pourrait aussi fabriquer un modèle basé sur les degrés de liberté σ et π comme c'est le cas des modèles sigma-linéaire et sigma-non-linéaire [45, 46] ou encore un modèle mélangeant les deux approches [47].

Chapitre 5

Les bases du modèle Nambu–Jona-Lasinio

Nous présenterons dans ce chapitre les bases du modèle Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [48, 49], en particulier le lagrangien de la théorie et l’approximation de champ moyen utilisée [50, 51].

5.1 Le lagrangien de NJL

Le lagrangien de NJL est un lagrangien effectif dont le but est de décrire les interactions fortes à basse énergie en supposant les gluons gelés rendant l’interaction entre quarks ponctuelle comme illustré sur la figure 5.1. Il est construit de manière à décrire la symétrie chirale qui est le facteur déterminant pour étudier la physique hadronique à basse énergie. Dans toute l’étude suivante, nous nous limiterons à deux saveurs pour les quarks : up et down. En posant, par soucis de concision, $\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ avec u et d les champs de quarks u et d , l’expression du lagrangien du modèle NJL est la suivante :

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_0)\Psi + G[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2] \quad (5.1)$$

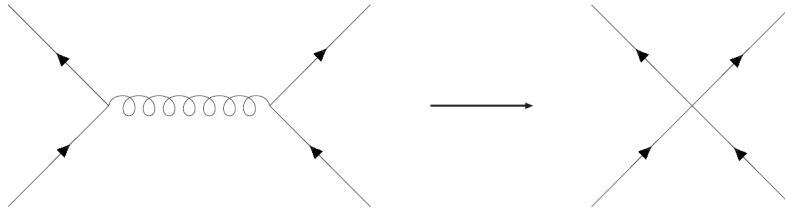


FIG. 5.1 – On transforme l’échange d’un gluon de très courte portée en une interaction ponctuelle en NJL.

avec G une constante réelle appelée constante de couplage, m_0 la masse des quarks libres (on supposera toujours la limite d'isospin exacte : $m_u = m_d = m_0$) et $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

On montrera par la suite que le terme $(\bar{\Psi}\Psi)^2$, correspondant à une interaction à quatre quarks, donne lieu à l'échange d'un état quasi-lié ou résonant isoscalaire de nombres quantiques $J^{PC} = 0^{++}$ identifié au mode σ lors de la diffusion quark-antiquark (J , P et C correspondant respectivement au spin, à la parité et à la charge du mode en question). Le terme $(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$ correspond, quant à lui, à l'échange d'un mode isovectoriel de nombres quantiques $J^{PC} = 0^{-+}$ identifié au pion. Le premier terme rend donc compte d'un vertex scalaire-isoscalaire et le second d'un vertex pseudoscalaire-isovecteur [52]. Notons que le terme d'interaction est invariant chirale.

On remarque également que l'interaction présente dans le lagrangien est une interaction de contact. Cela aura pour conséquence de rendre le lagrangien non-renormalisable : la régularisation s'effectuera en coupant les impulsions supérieures à une échelle Λ . Cette coupure de l'interaction à hautes impulsions est une manière brutale de rendre compte du régime de liberté asymptotique. Enfin, la symétrie de couleur qui était une symétrie locale en QCD, devient ici une symétrie globale ce qui conduit à l'absence de confinement dans le modèle NJL. Toutefois, pour décrire le secteur mésonique léger à faibles températures, le confinement n'est pas absolument nécessaire et la prise en compte de la symétrie chirale peut suffire.

On construit ainsi un modèle qui permet d'étudier la brisure spontanée de la symétrie chirale ainsi que ses conséquences telle que la génération dynamique de la masse des quarks. Cette génération de la masse des quarks par l'interaction est, en effet, nécessaire pour satisfaire l'image d'un nucléon constitué de trois quarks, la masse du nucléon, proche d'1 GeV, étant très éloignée de trois fois la masse m_0 .

5.2 L'influence du champ moyen

On a ainsi introduit le lagrangien du modèle NJL. Il s'agit désormais de décrire la manière dont l'interaction donne une grande masse effective aux quarks.

5.2.1 L'équation de Dyson dans le modèle NJL

Afin de calculer la polarisation des quarks pour pouvoir expliquer l'apparition d'une masse effective ou masse habillée par l'interaction, introduisons la *self-energy* Σ (aussi appelée opérateur de masse dynamique) composée de tous les diagrammes à deux pattes externes. On omettra les indices de

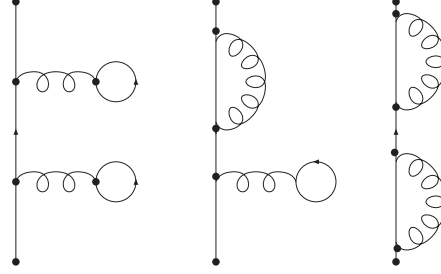


FIG. 5.2 – Diagrammes exclus dans la self-energy propre.

couleur. Si $S_0(p)$ est le propagateur causal du quark libre,

$$S_0(p) = \frac{1}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \quad (5.2)$$

avec m_0 la masse du quark nu et p sa quadri-impulsion et si $S(p)$ est le propagateur causal du quark habillé, on a la relation suivante, appelée équation de Dyson :

$$S(x, y) = S_0(x, y) + \int S_0(x, z) \Sigma(z) S_0(z, y) dz. \quad (5.3)$$

qu'on peut noter de manière simplifiée :

$$S = S_0 + S_0 \Sigma S_0. \quad (5.4)$$

Il est plus commode d'introduire la *self-energy* propre Σ^* correspondant aux diagrammes ne pouvant pas être séparés en deux parties non connexes par la coupure d'une seule ligne fermionique. Par exemple, les diagrammes de la Fig. 5.2 sont exclus car ils peuvent être séparés en deux parties non connexes par ce simple type de coupure. Remarquons que, pour bien visualiser les diagrammes, en particulier pour séparer les termes directs et d'échange, on a représenté l'interaction par une ligne de type gluon. Cette interaction est en fait ponctuelle dans le modèle NJL.

On a le développement suivant : $\Sigma = \Sigma^* + \Sigma^* S_0 \Sigma^* + \Sigma^* S_0 \Sigma^* S_0 \Sigma^* + \dots$ d'où la relation $S = S_0 + S_0 \Sigma^* S_0 + S_0 \Sigma^* S_0 \Sigma^* S_0 + \dots$ et d'où

$$S = S_0 + S_0 \Sigma^* S \quad (5.5)$$

i.e.

$$S^{-1} = S_0^{-1} - \Sigma^*. \quad (5.6)$$

L'expression $S = S_0 + S_0 \Sigma^* S$ est représentée sur la Fig. 5.3, les lignes fines correspondant à S_0 , les lignes épaisses à S et le disque à Σ^* .

Pour calculer Σ^* , certaines approximations sont indispensables.

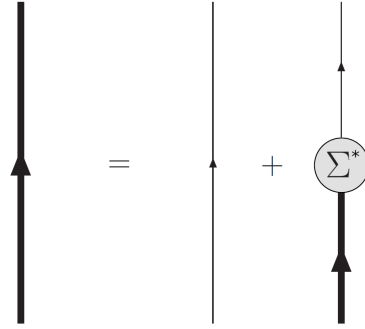


FIG. 5.3 – Formulation diagrammatique de l'équation de Dyson. L'expression $S = S_0 + S_0 \Sigma^* S$ est représentée sur la Fig. 5.3, les lignes fines correspondant à S_0 , les lignes épaisses à S et le disque à Σ^* .

5.2.2 L'approximation de Hartree-Fock

En première approximation, la self-energy propre peut se réduire à la contribution de premier ordre Σ_1^* :

(5.7)

L'approximation de Hartree-Fock, moins radicale, consiste à prendre en compte les polarisations des lignes fermioniques des diagrammes de la fi-

gure précédente. D'où le développement suivant :

The diagram shows the expansion of the self-energy Σ^* as a sum of terms. The first row contains three terms: a gluon loop (a circle with a wavy line), a gluon loop with a Σ^* insertion, and a gluon loop with two Σ^* insertions. The second row continues the expansion with a gluon exchange (a vertical line with a wavy line), a gluon exchange with a Σ^* insertion, and a gluon exchange with two Σ^* insertions. The expansion is indicated by ellipses after each row.

(5.8)

Ce qui peut se résumer grâce à 5.5 par l'équation suivante :

The diagram shows the self-energy Σ^* equal to the sum of two terms. The first term is a gluon loop with a thick black arrow pointing clockwise. The second term is a gluon exchange diagram with a thick black arrow pointing upwards.

(5.9)

Le premier terme est appelé terme direct ou terme de Hartree et le deuxième, terme d'échange ou terme de Fock. On a opéré une approximation de champ moyen : la propagation du quark est affectée par le champ moyen créé par les polarisations.

5.2.3 Calcul de la self-energy dans l'approximation de Hartree-Fock

Nous avons, par soucis de clarté, développé les lignes de gluons pour tracer les diagrammes précédents. Replaçons-nous désormais dans le cadre strict du modèle NJL. Les interactions entre quarks sont maintenant ponctuelles, les propagateurs de gluons dans 5.9 sont alors réduits à un point ce qui permet de réécrire l'équation de la Fig.5.3, que ce soit pour le terme de

Hartree ou de Fock, de la manière suivante :

$$(5.10)$$

La self-energy permet d'établir le lien entre le propagateur libre S_0 et le propagateur habillé S . Pour établir ce lien, on décompose le hamiltonien de la théorie H en deux contributions : le hamiltonien libre H_0 et le hamiltonien d'interaction : H_I : $H = H_0 + H_I$. On définit $|0\rangle$ comme étant l'état fondamental du hamiltonien libre H_0 et $|\Omega\rangle$ comme l'état fondamental du hamiltonien total H .

Le propagateur libre entre deux points d'espace-temps x et y s'écrit alors $S_0 = -i\langle 0 | T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) | 0 \rangle$ avec T l'opérateur d'arrangement temporel. Le propagateur habillé s'écrit quant à lui : $S = -i\langle \Omega | T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) | \Omega \rangle$. On montre que [53] :

$$S = -i\langle \Omega | T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) | \Omega \rangle = -i\langle 0 | T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y) \exp\{-i \int dt H_I(t)\}) | 0 \rangle \quad (5.11)$$

ce qui nous permettra de relier S à S_0 . Seuls les diagrammes connectés sont pris en compte dans le membre de gauche. On a $H_I = - \int d^3x \mathcal{L}_I$ avec \mathcal{L}_I le lagrangien d'interaction qui dans le modèle NJL s'écrit, d'après l'équation 5.1 :

$$\mathcal{L}_I(z) = G\bar{\Psi}(z)\Gamma\Psi(z)\bar{\Psi}(z)\Gamma\Psi(z) \quad (5.12)$$

Γ correspondant au vertex de l'interaction : $\Gamma_\sigma = 1$ pour l'interaction scalaire et $\Gamma_\pi = i\gamma_5\vec{\tau}$ pour l'interaction pseudoscalaire.

L'approximation de Hartree-Fock consiste à appliquer un développement limité à l'exponentielle dans 5.11. Le premier terme du développement donne S_0 . Le second terme, correspondant au développement de la self-energy au premier ordre Σ_1^* illustré Fig. 5.7, donne :

$$G\langle 0 | T \int d^4z \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \bar{\Psi}_\gamma(z) \Gamma^{\gamma\delta} \Psi_\delta(z) \bar{\Psi}_\epsilon(z) \Gamma^{\epsilon\lambda} \Psi_\lambda(z) | 0 \rangle. \quad (5.13)$$

En utilisant les contractions de Wick, quatre termes apparaissent. Le premier s'écrit :

$$G\langle 0 | T \int d^4z \overbrace{\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \bar{\Psi}_\gamma(z)}^{\Gamma^{\gamma\delta}} \Psi_\delta(z) \overbrace{\bar{\Psi}_\epsilon(z) \Gamma^{\epsilon\lambda} \Psi_\lambda(z)}^{\Gamma^{\delta\epsilon}} | 0 \rangle \quad (5.14)$$

ce qui donne $iGS_0(x, z)\Gamma S_0(z, y) \text{Tr}(\Gamma S_0)$ avec Tr la trace sur les indices de couleur, de saveur et spinoriels : c'est le terme de Hartree ou terme direct. Un deuxième terme donne le même résultat et les deux derniers donnent : $-iGS_0(x, z)\Gamma S_0(z, z)\Gamma S_0(z, y)$: c'est le terme de Fock ou terme d'échange.

On a donc développé S à l'ordre 1 sous la forme :

$$S = S_0 + S_0(x, z)\Sigma_1^* S_0(z, y). \quad (5.15)$$

On a en effet :

$$S = S_0 + 2iGS_0(x, z)\Gamma S_0(z, y) \text{Tr}(\Gamma S_0) - 2iGS_0(x, z)\Gamma S_0(z, z)\Gamma S_0(z, y). \quad (5.16)$$

D'où, par identification,

$$\Sigma_1^* = 2iG[\Gamma \text{Tr}(\Gamma S_0) - \Gamma S_0 \Gamma]. \quad (5.17)$$

Pour obtenir Σ^* correspondant à l'approximation de Hartree-Fock, on prend en compte les polarisations des lignes fermioniques, ce qui revient à remplacer dans l'équation précédente S_0 par S :

$$\Sigma^* = 2iG[\Gamma \text{Tr}(\Gamma S) - \Gamma S \Gamma]. \quad (5.18)$$

La self-energy correspondant au vertex scalaire $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ vaut donc :

$$\Sigma^s = 2G[\text{Tr}(iS(z, z)) - iS(z, z)], \quad (5.19)$$

et celle associée au vertex pseudoscalaire $(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$:

$$\Sigma^{ps} = 2G[i\gamma_5\vec{\tau} \text{Tr}(iS(z, z))i\gamma_5\vec{\tau} - i\gamma_5\vec{\tau} iS(z, z)i\gamma_5\vec{\tau}]. \quad (5.20)$$

On constate que Σ est constant car l'invariance par translation du propagateur implique que $S(x, y) = S(x - y)$. En effectuant certaines approximations, on obtient donc une *self-energy* indépendante de l'impulsion p , ce qui permet d'après 5.6 d'écrire S sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (5.21)$$

en posant :

$$m = m_0 + \Sigma^*. \quad (5.22)$$

On en déduit, en développant S dans l'espace des impulsions et en utilisant les propriétés de la trace et des matrices γ :

$$\Sigma^* = \Sigma^s + \Sigma^{ps} = 2iG \left(N_c N_f + \frac{\vec{\tau}^2 - 1}{4} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (5.23)$$

c'est à dire

$$\Sigma^* = 2iG \left(N_c N_f + \frac{1}{2} \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.24)$$

N_c et N_f étant les dimensions respectives des espaces de couleur et de saveur.

On obtient ainsi l'expression de la masse habillée du quark m en fonction de sa masse nue m_0 et de la self-energy Σ^* . Cette relation est appelée équation du gap par analogie avec le gap supraconducteur. Il s'agit maintenant de développer Σ^* afin d'obtenir une expression calculable de cette équation.

5.2.4 L'équation du gap

Désormais, on négligera la contribution du terme d'échange (le terme $\frac{1}{2}$ dans 5.24). Cette approximation se justifie par le fait que les termes direct et d'échange sont proportionnels : ils sont obtenus l'un par l'autre grâce aux transformations de Fierz (voir Annexe A). On peut donc négliger l'un des deux et réajuster la constante de couplage G pour compenser l'opération. On obtient alors :

$$\Sigma^* = 2iG N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.25)$$

On a $p^2 - m^2 + i\epsilon = (p_0 - E_p + \frac{i\epsilon}{2E_p})(p_0 + E_p - \frac{i\epsilon}{2E_p})$ avec $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Donc en intégrant sur un contour du plan complexe entourant un pôle et collé à l'axe réel puis en appliquant le théorème des résidus dans la limite où la taille du contour tend vers l'infini, on obtient :

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{-i}{2E_p}. \quad (5.26)$$

On sous-entendra la prescription $+i\epsilon$ dans toutes les intégrales suivantes. On a :

$$\Sigma^* = 2iG N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-4im}{2E_p}. \quad (5.27)$$

On en déduit l'équation suivante :

$$m - m_0 = 8mG N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}. \quad (5.28)$$

Cette équation est appelée équation du gap par analogie avec l'étude des supraconducteurs. Elle permet de calculer la valeur de la masse habillée du quark m à partir de la masse nue m_0 , cette masse est générée dynamiquement par les interactions par opposition à m_0 qui provient d'un terme du lagrangien.

Enfin, pour pallier la non-renormalisabilité du modèle NJL on procède à une coupure dans l'intégrale sur l'impulsion tridimensionnelle. Ainsi, toutes les intégrales divergentes qui seront calculées le seront de zéro à une valeur Λ . On considère par cette coupure que les quarks de grandes impulsions appartiennent au régime de liberté asymptotique. On obtient alors une expression permettant de calculer m :

$$m = m_0 + \frac{12G}{\pi^2} m \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (5.29)$$

On étudiera en détail la sensibilité des résultats par rapport à la valeur de Λ .

Le calcul de la masse habillée permet d'accéder à la valeur d'un paramètre essentiel pour l'étude de la transition chirale : le condensat de quarks. On verra qu'avec des paramètres usuels, la masse du quark se rapproche du tiers de la masse du nucléon, satisfaisant l'image du nucléon constitué de trois quarks effectifs.

5.2.5 Le condensat de quarks

Comme on a pu le voir, la masse des quarks entraîne une brisure de symétrie chirale. La faible masse m_0 est présente dans le lagrangien dans le terme couplant les champs de chiralités différentes, elle entraîne donc une légère brisure explicite de la symétrie chirale. La masse habillée m , quant à elle, caractérise l'état fondamental seulement : elle n'apparaît pas dans le lagrangien. Lorsqu'elle prend une valeur élevée (de l'ordre des énergies hadroniques c'est-à-dire quelques centaines de MeV), il y a brisure spontanée de la symétrie chirale.

Comme évoqué précédemment, le paramètre d'ordre qui permet de quantifier la brisure de symétrie chirale est le condensat de quarks dont l'expression est la suivante [54] :

$$\langle \bar{q}q \rangle = -i \lim_{x \rightarrow y} \langle 0 | T \bar{q}(x) q(y) | 0 \rangle = \frac{-i \text{Tr}(S(x, x))}{N_f}, \quad (5.30)$$

avec N_f , le nombre de saveur, ici égal à 2, ce qui donne :

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{m - m_0}{4G}. \quad (5.31)$$

Il prend une valeur faible, voire une valeur nulle à la limite chirale ($m_0 = 0$), dans le plasma de quarks et de gluons où la symétrie chirale est respectée et une valeur élevée ($\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \approx -220$ MeV) dans la matière hadronique où la symétrie est brisée spontanément.

Ce condensat peut être vu comme la conséquence que le vide (l'état fondamental) n'est pas perturbatif et que les quarks habillés sont des modes collectifs. Ainsi, les quarks habillés forment les degrés de liberté effectif de la théorie par opposition aux quarks nus qui constituent les degrés de liberté nus. Le vide non-perturbatif qui correspond à un domaine de symétrie brisée est, en effet, peuplé de paires quark-antiquark assimilées au condensat. La propagation d'un quark dans ce vide non-perturbatif subira donc l'influence de ce condensat.

En résumé, en développant $\langle \bar{q}q \rangle^2$ au premier ordre, le lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_{CM} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + \text{fluctuations}$, avec $m = m_0 + G \langle \bar{q}q \rangle$. Étudions désormais l'influence de la constante de couplage G sur le modèle.

5.2.6 Le rôle de la constante de couplage

Plaçons-nous un instant dans la limite chirale : $m_0=0$. L'équation 5.29 devient :

$$1 = \frac{12G}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (5.32)$$

une fois écartée la solution triviale $m = 0$. On remarque que le membre de droite est majoré par :

$$\frac{12G}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2}} = \frac{6G\Lambda^2}{\pi^2}. \quad (5.33)$$

Donc si $\frac{6G\Lambda^2}{\pi^2} < 1$, l'équation du gap dans la limite chirale ne comporte pas de solution autre que la solution triviale. C'est-à-dire, en notant, $G_C = \frac{\pi^2}{6\Lambda^2}$ la constante de couplage critique : si $G < G_C$, il n'y a pas de solution non-nulle à l'équation du gap. La masse habillée prend donc une valeur nulle. Il n'y a pas de brisure spontanée de la symétrie chirale. C'est donc seulement lorsque la constante de couplage est grande que l'interaction entre les quarks est suffisamment forte pour qu'il y ait appariement des quarks et formation du condensat. C'est seulement dans ce cas que la forte valeur de l'interaction crée une polarisation du quark lors de sa propagation et lui donne une masse habillée élevée. On est dans le régime où le condensat et la masse habillée prennent une grande valeur ce qui caractérise une brisure spontanée de symétrie chirale. Le diagramme 5.4 donne l'allure de la masse habillée en fonction de la constante de couplage. m prend une valeur nulle si $G < G_C$ et une valeur non-nulle si $G > G_C$. On verra, par la suite, que la

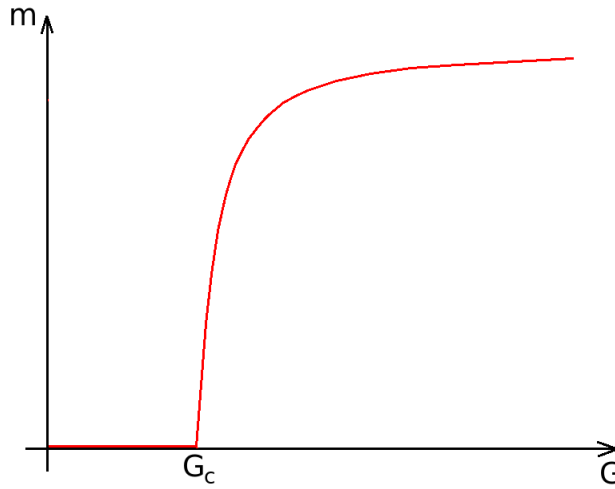


FIG. 5.4 – Masse habillée en fonction de la constante de couplage

température et la densité écrantent l'interaction et tendent donc à restaurer la symétrie chirale.

5.2.7 Conclusion

En reliant, grâce à l'équation de Dyson, la propagation du quark avec interaction à sa propagation sans interaction et en se plaçant dans l'approximation de Hartree-Fock, on a pu aboutir à "l'équation du gap" donnant la relation entre la masse du quark habillé par l'interaction m et sa masse nue m_0 . Voyons, maintenant, comment les mésons sont décrits dans le modèle NJL.

5.3 Calcul des quantités mésoniques

Les mésons sont introduits en tant qu'états liés ou résonants d'un quark et d'un antiquark. Nous allons présenter le formalisme utilisé en nous restreignant au cas du pion.

5.3.1 Le méson π

Lorsqu'une symétrie continue est brisée spontanément, une nouvelle particule sans masse apparaît dans le spectre des excitations possibles. Le mécanisme de brisure est appelé mécanisme de Goldstone et la nouvelle particule est le "boson de Goldstone". Ici, la symétrie en question est la symétrie chirale. Elle est légèrement brisée explicitement ce qui donne une légère masse au boson de Goldstone. Cette approche permet de donner une interprétation de la légèreté du pion (comparé à son partenaire chirale le

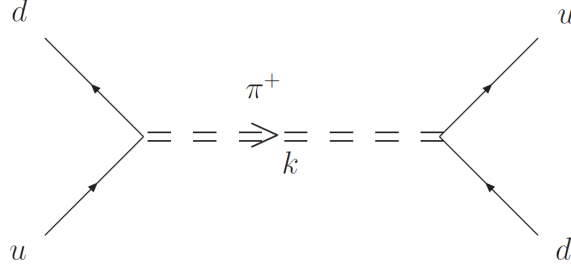


FIG. 5.5 – Échange d'un pion.

méson σ de masse $m_\sigma \approx 2m \approx 650$ MeV) vu comme le boson de Goldstone associé à la brisure de la symétrie chirale.

Pour présenter d'une façon intuitive le formalisme, nous allons comparer le modèle NJL ne comportant que des quarks à un modèle effectif dont les mésons sont aussi des degrés de liberté fondamentaux. Un tel modèle doit contenir le lagrangien d'interaction $\bar{q}q\pi$ suivant :

$$\mathcal{L}_{\pi qq} = ig_{\pi qq} \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \Psi(x) \quad (5.34)$$

avec $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ et $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. On pose : $\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2)$ et $\tau^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm i\tau_2)$ d'où $\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \tau^+ \pi^+ + \tau^- \pi^- + \tau^3 \pi^3$. Ce terme de couplage donne la possibilité à un boson vecteur de se propager lors de la diffusion d'un quark sur un antiquark. Le diagramme présenté sur la Fig. 5.5 illustre l'échange d'un π^+ . Il représente le terme suivant si l'on enlève les pattes externes, k étant le moment transféré :

$$iU(k^2) = i\gamma_5 \tau^- \frac{-ig_{\pi qq}^2}{k^2 - m_\pi^2} i\gamma_5 \tau^+. \quad (5.35)$$

Identifions ce terme avec son équivalent dans le modèle NJL. Pour cela, considérons, Π_{ps} la polarisation à l'ordre le plus bas dans le canal pseudoscalaire [55]. Elle s'exprime en fonction du propagateur du quark $S(p)$:

$$\frac{1}{i} \Pi_{ps}(k^2) = - \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_5 \tau^- iS(p+k/2) i\gamma_5 \tau^+ iS(p-k/2)] \quad (5.36)$$

et correspond au diagramme de la Fig. 5.6 :

Dans le modèle NJL, c'est l'interaction dans le canal pseudoscalaire qui est identifiée à l'échange d'un pion [56]. L'amplitude de cette interaction est calculée dans l'approximation des boucles (également appelée approximation

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) = i\gamma_5\tau^- \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet i\gamma_5\tau^+$$

FIG. 5.6 – Polarisation dans le canal pseudoscalaire.

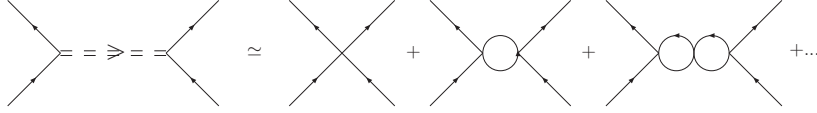


FIG. 5.7 – Approximation de boucles.

des *rings*), en sommant une infinité de termes faisant intervenir $\Pi_{ps}(k^2)$:

$$\begin{aligned} iU(k^2) = i\gamma_5\tau^- & \left[2iG + 2iG \left(\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right) 2iG \right. \\ & \left. + 2iG \left(\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right) 2iG \left(\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right) 2iG + \dots \right] i\gamma_5\tau^+ \end{aligned} \quad (5.37)$$

ce qui est illustré sur la figure 5.7. L'expression précédente se simplifie :

$$iU(k^2) = i\gamma_5\tau^- \left[\frac{2iG}{1 - 2G\Pi_{ps}(k^2)} \right] i\gamma_5\tau^+. \quad (5.38)$$

Or, $k^2 = m_\pi^2$ est un pôle de $iU(k^2)$ d'après 5.35 donc $1 - 2G\Pi_{ps}(m_\pi^2) = 0$. En développant $1 - 2G\Pi_{ps}(k^2)$ au premier ordre autour de $k^2 = m_\pi^2$, on obtient alors :

$$1 - 2G\Pi_{ps}(k^2) = 0 + (k^2 - m_\pi^2)(-2G)\frac{\partial\Pi_{ps}}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m_\pi^2} \quad (5.39)$$

d'où par identification avec 5.35,

$$g_{\pi qq}^2 = \frac{\partial\Pi_{ps}}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m_\pi^2}^{-1}. \quad (5.40)$$

On décrit donc la propagation du pion comme la somme de diagrammes à boucle calculés dans le modèle NJL ce qui permet d'obtenir une expression de la constante de couplage effective en fonction de la polarisation des quarks, c'est-à-dire en fonction de données du modèle NJL. Ceci permet donc d'introduire dans ce modèle la description du couplage des quarks à un boson vecteur. Cette approche va nous permettre de calculer la masse des mésons π et σ en utilisant l'équation $Re[1 - 2G\Pi_{ps}(k^2 = m_{\pi,\sigma})] = 0$. On verra que ce procédé sera utilisé seulement à température et densité nulles.

5.3.2 Calcul de m_π et de m_σ

On identifie l'équation $k^2 = m_\pi^2$ à $1 - 2G\Pi_{ps}(k^2) = 0$. Cette dernière équation nous permettra donc de trouver la masse du pion. En utilisant les propriétés de la trace on obtient à partir de 5.36 :

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) = -4N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m^2 - p^2 + k^2/4}{[(p + k/2)^2 - m^2][(p - k/2)^2 - m^2]}. \quad (5.41)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) = 4N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} - 2N_c N_f k^2 I_2(k^2) \quad (5.42)$$

avec $I_2(k^2)$, appelée intégrale de boucle, ayant pour expression [57] :

$$I_2(k^2) = \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p + k/2)^2 - m^2][(p - k/2)^2 - m^2]}. \quad (5.43)$$

D'après 5.24, on a :

$$m = m_0 + 8iGN_c N_f m \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (5.44)$$

ce qui, combiné avec 5.42, permet d'écrire :

$$1 - 2G\Pi_{ps}(k^2) = \frac{m_0}{m} + 4iGN_c N_f k^2 I_2(k^2). \quad (5.45)$$

D'où en posant $k^2 = m_\pi^2$,

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{m} \frac{1}{4iGN_c N_f I_2(m_\pi^2)}. \quad (5.46)$$

On remarque qu'on obtient bien une masse nulle pour le pion à la limite chirale ($m_0 = 0$) ce qui confirme la description du pion en tant que boson de Goldstone associé à la brisure de la symétrie chirale. On calcule $I_2(k^2)$ en intégrant sur un contour du plan complexe. On obtient :

$$I_2(k_0, \vec{k}) = -i \int_0^\Lambda \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \left[\frac{1}{k_0^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{k} - 2k_0 E_p} + \frac{1}{k_0^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{k} + 2k_0 E_p} \right], \quad (5.47)$$

d'où

$$I_2(\omega, \vec{0}) = -i \int_0^\Lambda \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 E_p} \left(\frac{1}{\omega^2 - 4E_p^2} \right). \quad (5.48)$$

On fera, de plus, l'approximation suivante : $I_2(m_\pi^2) \approx I_2(0)$.

On obtient la masse du meson σ en reproduisant les calculs précédents dans le cas du mode scalaire, ce qui donne

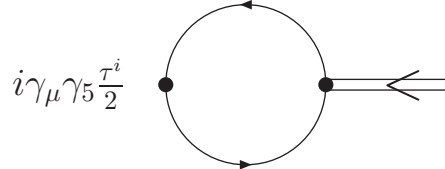
$$m_\sigma^2 = -\frac{m_0}{m} \frac{1}{4iGN_c N_f I_2(m_\sigma^2)} + 4m^2. \quad (5.49)$$

Le calcul de l'intégrale de boucle fait ici intervenir des ambiguïtés de re-normalisation issues de la régularisation par cutoff [58]. Ces ambiguïtés inhérentes au modèle NJL ne seront pas détaillées ici.

Une autre quantité calculable grâce à cette approche est la constante de désintégration du pion f_π .

5.3.3 Calcul de f_π

La constante de désintégration du pion est calculée à partir de l'élément de matrice du courant axial-vecteur pris entre les états "vide" et "un pion" : $\langle 0 | A_\mu | \Pi \rangle$ ce qui donne de manière diagrammatique :



$$(5.50)$$

On en déduit la relation suivante :

$$ik_\mu f_\pi \delta^{ij} = - \int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^i}{2} iS(p+k/2) i g_{\pi qq} \gamma_5 \tau^j iS(p-k/2) \right] \quad (5.51)$$

d'où, en approximant $I_2(k^2)$ à $I_2(0)$, $f_\pi^2 = -4iN_c m^2 I_2(0)$. En combinant cette équation avec 5.46, on obtient l'équation de Gell-Mann-Oakes-Reiner (GOR) qui est un résultat obtenu au premier ordre en QCD :

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_0 \langle \bar{q}q \rangle. \quad (5.52)$$

Ceci rend le modèle NJL satisfaisant, au sens où l'on retrouve à la fois le théorème de Goldstone et la relation GOR.

Pour illustrer, cette fois avec des quantités mésoniques, la brisure spontanée de la symétrie chirale, on peut fabriquer un modèle en terme de champs mésoniques. On construit alors un potentiel effectif dépendant des champ σ et π et prenant la forme d'un chapeau mexicain lors de la brisure de symétrie voir figure 5.8 extraite de [59]. Le cercle au fond du "chapeau" a pour équation $\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$. Son rayon a donc pour valeur f_π qui constitue ainsi un paramètre associé à la brisure de symétrie chirale : il est nul si la symétrie est restaurée et non-nul si la symétrie est brisée. Ce rayon

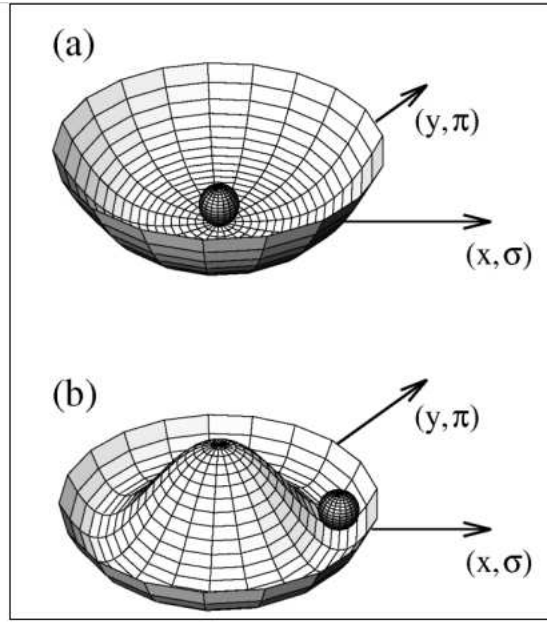


FIG. 5.8 – Potentiel effectif de symétrie chirale [59].

est également associé à la valeur que prend le condensat, on retrouve le fait qu'en cas de brisure de symétrie, le condensat prend une valeur non-nulle. Enfin, le mode de Goldstone est associé aux fluctuations longitudinales, soit aux déplacements le long du cercle. On retrouve, ici, le fait que ces fluctuations se font sans variations de potentiel (même altitude le long du cercle) et sont donc associées à un mode non-massique.

Voyons de quelle manière ces différentes quantités sont modifiées lorsque l'on fait varier les paramètres du modèle.

5.3.4 Choix et influence des paramètres

Le modèle comporte trois paramètres : m_0 , G et Λ . On fixe ces paramètres afin de retrouver les valeurs expérimentales (ou obtenues lors des calculs sur réseau) des quantités suivantes : $m_\pi = 139$ MeV, $f_\pi = 93.3$ MeV et $\langle \bar{q}q \rangle^{\frac{1}{3}}$ entre -230 et -250 MeV. On impose également que ces paramètres prennent des valeurs raisonnables : $\Lambda < 2$ GeV et $m_0 \approx m_u$. Un jeu de paramètres adéquat est par exemple :

$$\begin{cases} \Lambda = 602,5 \text{ MeV} \\ m_0 = 5,8 \text{ MeV} \\ G = 2,38/\Lambda^2 \approx 6,56 \text{ GeV}^{-2}. \end{cases} \quad (5.53)$$

Ce qui donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} <\bar{q}q>^{\frac{1}{3}} = -245 \text{ MeV} \\ m_\pi = 139 \text{ MeV} \\ f_\pi = 93,7 \text{ MeV}. \end{cases} \quad (5.54)$$

On peut désormais calculer la masse habillée des quarks : $m = 389 \text{ MeV}$. Cette masse, de l'ordre du tiers de la masse du nucléon, est en accord avec la représentation du nucléon constitué de trois "gros" quarks. D'autres paramétrisations donnent des valeurs plus proches de 300 MeV. Ces valeurs vérifient de plus la relation de GOR. Cette relation, au même titre que celle de Goldberger-Treiman, est un résultat d'algèbre des courants, elle reste donc valable en NJL car c'est une conséquence des propriétés de symétrie que le modèle NJL conserve de la QCD. On a donc trois paramètres : m_0 , G et Λ qu'on ajuste afin de reproduire les valeurs de trois données : m_π , f_π et $<\bar{q}q>^{\frac{1}{3}}$ et afin de faire des prédictions pour deux autres : m et m_σ . Étudions le comportement des trois données et des deux prédictions lorsqu'on fait varier les paramètres.

Sur ce premier tableau, on fait varier Λ en laissant G et m_0 fixés aux valeurs précédentes.

G	m_0	Λ	m_π	f_π	$<\bar{q}q>^{\frac{1}{3}}$	m	m_σ
6,56	5,8	400	251	10,6	-72,7	15,9	253
6.56	5,8	500	150	41,8	-147	89,4	234
6.56	5,8	602,5	140	93,7	-245	389	791
6.56	5,8	620	143	98,5	-256	448	908

G est en GeV^{-2} et toutes les autres données sont en MeV. On constate que lorsque Λ diminue, m et f_π tendent vers zéro tandis que les masses des partenaires chiraux que sont le pion et le sigma se confondent. Cela s'apparente à la restauration de la symétrie chirale. Sur le tableau suivant, on fait varier m_0 en laissant G et Λ fixés aux valeurs initiales.

G	m_0	Λ	m_π	f_π	$<\bar{q}q>^{\frac{1}{3}}$	m	m_σ
6.56	0	602,5	0	93,0	-243	377	756
6.56	1	602,5	57,7	93,1	-243	379	760
6.56	3	602,5	100	93,4	-244	383	773
6.56	5	602,5	130	93,6	-244	388	786
6.56	5,8	602,5	140	93,7	-245	389	791

On observe que lorsque m_0 augmente, m , f_π , $<\bar{q}q>^{\frac{1}{3}}$ et m_σ sont quasiment constants : ils augmentent très légèrement tandis que m_π passe d'une valeur nulle à 140 MeV, ceci en accord avec la relation de Gell-Mann-Oakes-Reiner. Enfin sur ce dernier tableau, on fait varier G en laissant m_0 et Λ fixés aux

valeurs initiales.

G	m_0	Λ	m_π	f_π	$\langle \bar{q}q \rangle^{\frac{1}{3}}$	m	m_σ
1	5,8	602,5	792	5,9	-74,3	7,4	792
3	5,8	602,5	338	12,0	-97,9	17,1	340
5	5,8	602,5	148	68,0	-204	176	381
6	5,8	602,5	140	88,6	-235	319	652
6.56	5,8	602,5	140	93,7	-245	389	791

On constate que lorsque G diminue, $\langle \bar{q}q \rangle^{\frac{1}{3}}$, m et f_π diminuent très fortement et les valeurs de m_π et de m_σ se confondent, signe, encore une fois, d'une restauration chirale.

Tous les calculs effectués jusqu'à présent l'ont été à température et potentiel chimique nuls. Dans la section suivant, nous détaillons l'influence de la température et du potentiel chimique sur le modèle.

5.4 Introduction de la température et du potentiel chimique

Intéressons-nous à la dépendance en température des masses des quarks habillés et des mésons.

5.4.1 Le formalisme de Matsubara

La physique des milieux étudiés ici, en particulier du QGP, est à la frontière entre la physique des particules et la physique statistique, elle doit donc combiner des concepts et des méthodes des deux domaines. Ainsi on associe à des éléments issus de la QCD des éléments de thermodynamique permettant de rendre compte de l'aspect macroscopique de la physique nucléaire. Parmi ces éléments, la température tient une place de premier choix. À température nulle, le propagateur du quark habillé s'écrivait :

$$S(\vec{p}, p_0) = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (5.55)$$

Afin de tenir compte de la température, on écrit ce propagateur dans le formalisme de Matsubara *i.e.* avec une fonction de Green en temps imaginaire ($\tau = it$) :

$$S(\vec{x}, \tau; \vec{x}', \tau') = \langle -T \Psi(\vec{x}, \tau) \bar{\Psi}(\vec{x}', \tau') \rangle. \quad (5.56)$$

avec T le produit chronologique, $\langle A \rangle = \frac{Tr(Ae^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})}$, β l'inverse de la température et H le hamiltonien du système. Pour les fermions, cette fonction est antipériodique sur un intervalle β :

$$S(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau')|_{\tau - \tau' = 0} = -S(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau')|_{\tau - \tau' = \beta} \quad (5.57)$$

Elle s'écrit donc de la manière suivante en fonction de sa transformée de Fourier :

$$S(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n(\tau - \tau')} \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} S(\vec{p}, \omega_n) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad (5.58)$$

avec $\omega_n = \pm(2n + 1)\pi/\beta$ appelées fréquences de Matsubara n étant un entier. Avec le même type de raisonnement qu'à température nulle, on écrit la fonction de Green pour une particule libre de masse m de la manière suivante :

$$S(\vec{p}, \omega_n) = \frac{1}{\not{p}_n - m} \quad (5.59)$$

avec $p_n = (\vec{p}, i\omega_n)$.

On a ainsi abandonné la variable temporelle et ajouté la variable de température. Cette description est adéquate pour l'étude des systèmes à l'équilibre et thermalisés. On supposera ainsi que les différents milieux explorés (phase hadronique, plasma...) respectent ces conditions.

5.4.2 Prise en compte du potentiel chimique

Le potentiel chimique μ est la variable de Legendre associée au nombre de particule N . On ajoute donc un terme μN au lagrangien qui devient : $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \mu N + G[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2]$. Or, $N = \Psi^\dagger\Psi = \bar{\Psi}\gamma_0\Psi$, d'où $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m + \gamma^0\mu)\Psi$. On peut alors réécrire le propagateur à T et μ non-nuls :

$$S(p, \omega_n) = \frac{1}{\not{p}_n - m + \gamma^0\mu} = \frac{1}{\gamma^0(i\omega_n + \mu) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m}. \quad (5.60)$$

On effectue alors la décomposition suivante :

$$S(p, \omega_n) = \frac{\not{p} + m}{2E_p} \frac{1}{i\omega_n - (E_p - \mu)} + \frac{\tilde{\not{p}} - m}{2E_p} \frac{1}{i\omega_n + (E_p + \mu)} \quad (5.61)$$

avec $\not{p} = \gamma^0 E_p - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ et $\tilde{\not{p}} = \gamma^0 E_p + \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$. Le premier terme correspond au propagateur d'un quark et le second au propagateur d'un antiquark.

La température et le potentiel chimique sont ainsi intégrés de façons très différentes au modèle. Ces modifications ont des répercussions sur les relations calculées à partir du modèle, en particulier sur l'équation du gap.

5.4.3 Modification de l'équation du gap

Le développement de l'équation du gap faisait intervenir des termes du type

$$\int_0^\Lambda \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p^2 - m^2} = \int_0^\Lambda \frac{dp_0}{2\pi} \left(\frac{1}{p_0 - m} - \frac{1}{p_0 + m} \right) \frac{1}{2E_p} \quad (5.62)$$

(voir 5.26). D'après 5.58, on remplace $\int_0^\Lambda \frac{dp_0}{2\pi}$ par $\frac{1}{\beta} \sum_n$ et p_0 par $p_0 + \mu$.

On doit donc calculer des termes du genre : $\frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - (E_p \pm \mu)}$.

En notant, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\beta x}}$, on montre que :

$$\frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - (E_p \pm \mu)} = f(E_p \pm \mu). \quad (5.63)$$

L'équation du gap est alors modifiée de la manière suivante :

$$m - m_0 = 8mGN_cN_f \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)}{2E_p}. \quad (5.64)$$

On retrouve, la même expression qu'à température et potentiel chimique nuls (voir 5.48) à part pour le numérateur qui valait 1 et qui devient $1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)$.

5.4.4 Étude de la transition chirale

On peut ainsi calculer l'évolution de la masse habillée des quarks en fonction de la température pour différents potentiels chimiques : voir figure 5.9. On observe, dans les trois cas, une transition entre une phase à basse température où la masse habillée prend une valeur élevée (autour de 390 MeV) : la phase de symétrie chirale brisée et une phase à haute température où m tend vers m_0 qui correspond à la phase de symétrie chirale restaurée. On constate que plus le potentiel chimique est élevé, plus la transition s'effectue brutalement et à basse température : elle apparait autour de 210 MeV si $\mu = 0$ et autour de 110 MeV pour $\mu = 300$ MeV. On observe également que la courbe présente une zone multi-valuée pour un potentiel chimique de 360 MeV. C'est le signe d'une transition de phase de premier ordre : deux solutions métastables sont possibles et si l'on force la masse à être univaluée, la courbe présentera une discontinuité en passant abruptement de la solution de symétrie brisée à la solution de symétrie restaurée. Les deux autres transitions correspondent à des cross-overs. Ainsi, m ou plus précisément le condensat : $\langle \bar{q}q \rangle = \frac{m - m_0}{2G}$ joue bien le rôle de paramètre d'ordre pour la transition chirale. La valeur du condensat est de l'ordre de Λ_{QCD}^3 lorsque la symétrie est brisée et nulle lorsque la symétrie est restaurée.

5.4.5 Modification de l'intégrale de boucle et de la polarisation

L'intégrale de boucle et donc les polarisations scalaire et pseudo-scalaire sont également modifiées par l'introduction de la température et du potentiel

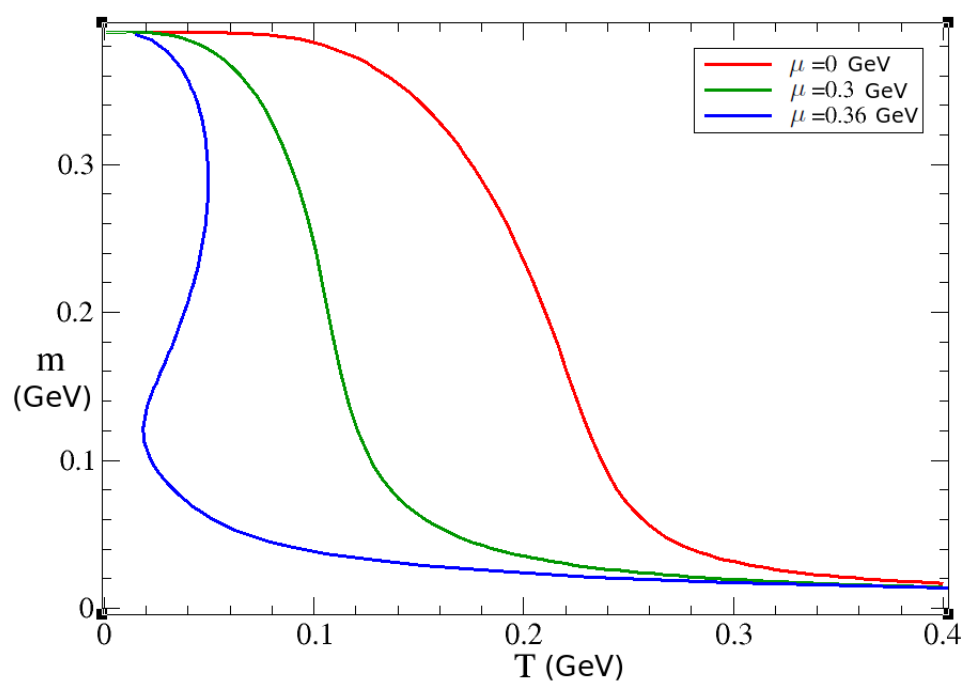


FIG. 5.9 – Masse habillée (en GeV) en fonction de la température (en GeV également) pour trois potentiels chimiques différents : 0 MeV ; 0,3 GeV et 0,36 GeV.

chimique. Les termes $f(E_p \pm \mu)$ interviennent également dans le calcul de l'intégrale de boucle et donc de la polarisation. On réécrit alors l'expression de $I_2(\omega, \vec{0})$:

$$I_2(\omega, \vec{0}) = -i \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)}{E_p(\omega^2 - 4E_p^2)} \right). \quad (5.65)$$

D'où,

$$\Pi^{ps}(\omega, \vec{0}) = -8N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{E_p}{\omega^2 - 4E_p^2} (1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)) \right) \quad (5.66)$$

et

$$\Pi^s(\omega, \vec{0}) = -8N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_p} \frac{E_p^2 - m^2}{\omega^2 - 4E_p^2} (1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)) \right). \quad (5.67)$$

On retrouve ici la même modification que dans l'équation du gap : le numérateur qui valait 1 devient $1 - f(E_p + \mu) - f(E_p - \mu)$. Détaillons plus précisément le calcul de l'intégrale de boucle.

5.4.6 Évaluation de l'intégrale de boucle par intégrale de Cauchy

On distingue deux cas pour effectuer le calcul de $I_2(\omega, \vec{0})$. Dans le premier cas, l'intégrand de $I_2(\omega, \vec{0})$ ne comporte pas de pôle, c'est-à-dire, $\omega^2 - 4E_p^2$ ne s'annule pas. Cette condition est vérifiée quand $\omega < 2m$ et quand $\omega > 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2}$. On calcule alors l'intégrale de manière classique et $I_2(\omega, \vec{0})$ est imaginaire pur. Dans le second cas : $\omega \in [2m, 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2}]$, l'intégrand comporte un pôle. On utilise alors le théorème de Sokhatsky-Weierstrass :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{f(x)}{x + i\epsilon} dx = -i\pi f(0) + \mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x} dx \quad (5.68)$$

avec $\mathcal{P} \int$ la valeur principale de Cauchy :

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (5.69)$$

La partie imaginaire de $I_2(\omega, \vec{0})$ se calcule donc à l'aide de la partie principale de Cauchy tandis que la partie réelle provient du terme $-i\pi f(0)$:

$$\text{Re}(I_2(\omega, \vec{0})) = \frac{-1}{16\pi} \left(1 - f\left(\frac{\omega}{2} - \mu\right) - f\left(\frac{\omega}{2} + \mu\right) \right) \sqrt{\frac{\omega^2 - 4m^2}{\omega^2}}. \quad (5.70)$$

On peut désormais calculer les polarisations des mésons pour chaque température et chaque potentiel chimique. Cela nous donne accès à une quantité mésonique dont on peut tirer de nombreuses informations : la fonction spectrale.

5.5 Comportement des mésons à T et μ non nuls

5.5.1 La fonction spectrale

La fonction spectrale est définie comme la partie imaginaire du corrélateur courant-courant $\tilde{\Pi}(\omega, \vec{q})$:

$$FS(\omega, \vec{q}) = \text{Im}(\tilde{\Pi}(\omega, \vec{q})) \quad (5.71)$$

avec un développement en boucle (*ring*) de quarks :

$$\tilde{\Pi}_M(\omega, \vec{q}) = \int < 0 | T \mathcal{J}_M(\vec{x}) \mathcal{J}_M(\vec{0}) | 0 > \simeq \frac{\Pi(\omega, \vec{q})}{1 - 2G_1 \Pi(\omega, \vec{q})}. \quad (5.72)$$

Il s'agit de la fonction spectrale où seules les boucles de quarks sont prises en compte : elle contient donc uniquement le canal de désintégration en quarks. Lorsque $1 - 2G\Pi = 0$, la fonction spectrale diverge, ce qui se traduit par un pic de Dirac. C'est le cas à température nulle pour le pion : voir figure 5.10. Pour le visualiser, on a rajouté artificiellement une très petite partie imaginaire à Π_{ps} transformant le pic en une fonction très piquée mais de hauteur finie. On observe également, en plus du pic de Dirac, un continuum non-nul au delà du seuil de désintégration $\omega > 2m$. La fonction spectrale du méson sigma ne présente, quant à elle, pas de pic de Dirac mais possède une forme qui reste très piquée.

Sur la figure 5.11, on trace les fonctions spectrales des deux mésons, à $T = 0, 3 \text{ GeV}$ cette fois. Cette fois-ci, même dans le cas du pion, le pic de Dirac disparaît. Les fonctions spectrales se superposent quasiment exactement et se retrouvent très élargies. Les masses des mésons sont, en effet, largement supérieures à $2m$: on ne peut donc plus considérer ces mésons comme des états liés ou quasi-liés. Nous verrons la forme que prennent les fonctions spectrales à $\mu \neq 0$ lors de la comparaison entre les modèles NJL et PNJL en section 8.3.

5.5.2 Détail du calcul de la masse

À température et potentiel chimique nuls, la masse du méson était calculée en cherchant le pôle de la fonction spectrale, c'est-à-dire en résolvant $1 - 2G\Pi(\omega) = 0$. Ici, on procède différemment.

Si $1 - 2G\Pi(\omega) = 0$ a une solution, la fonction spectrale présente un pic de Dirac et la masse du méson est identifiée à la fréquence vérifiant

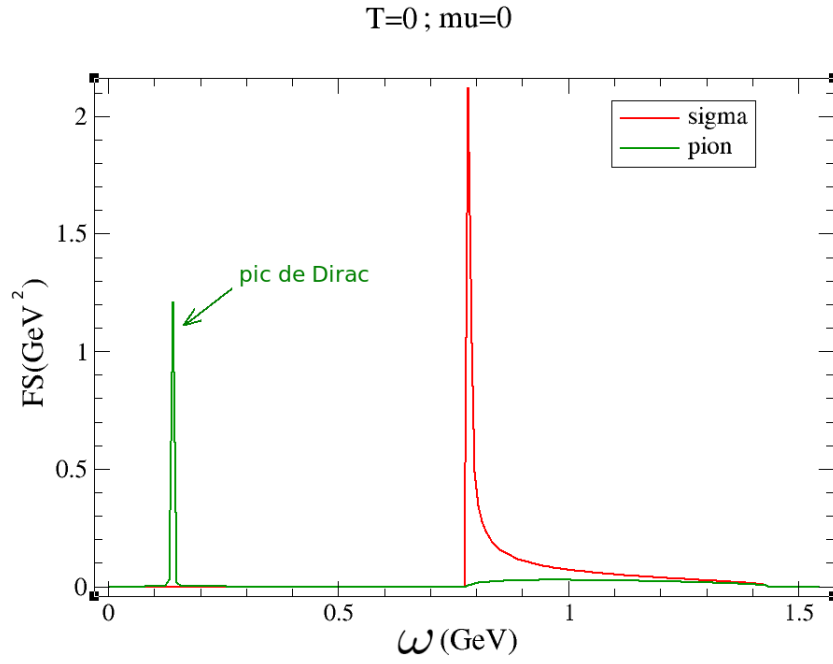


FIG. 5.10 – Fonctions spectrales $FS(\omega)$ du pion et du méson sigma à $T = 0$ et $\mu = 0$.

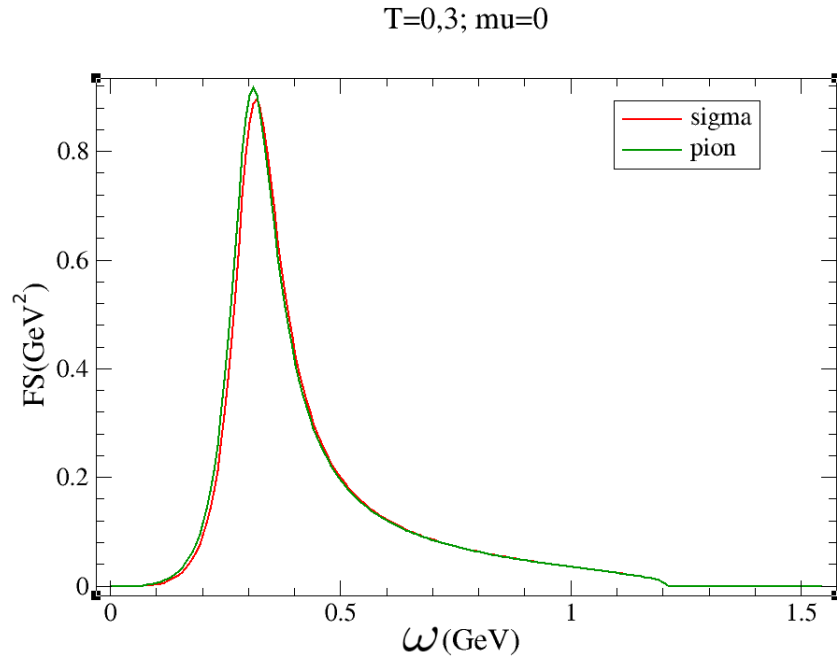


FIG. 5.11 – Fonctions spectrales $FS(\omega)$ du pion et du méson sigma à $T = 0,3 \text{ GeV}$ et $\mu = 0$.

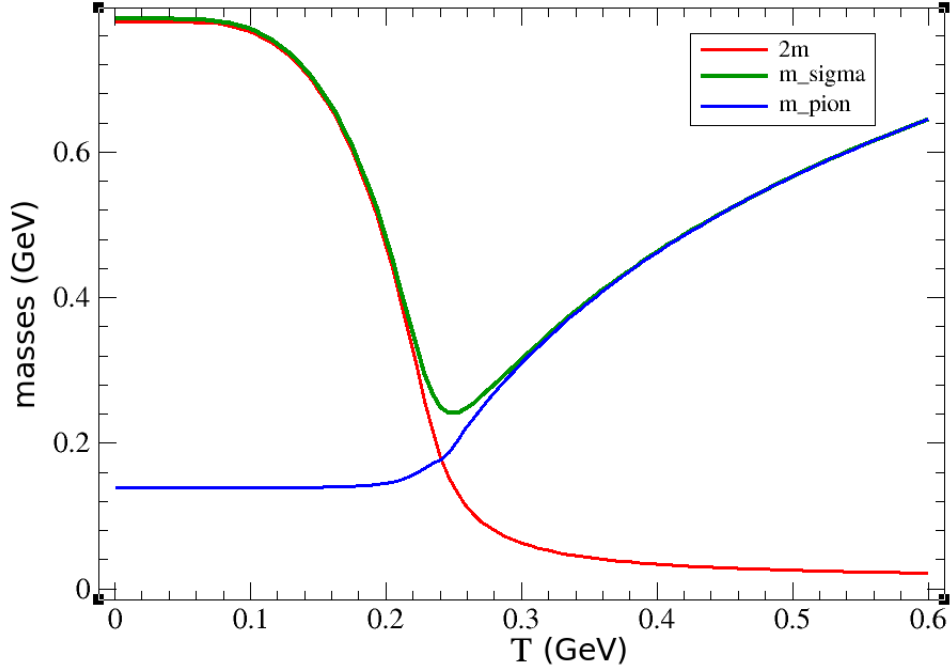


FIG. 5.12 – Évolution de la masse des mésons pi et sigma en fonction de la température à $\mu = 0$.

$1 - 2G\Pi(\omega) = 0$. Dans ce cas seulement, la méthode employée rejoint celle à température et potentiel chimique nuls. Dans le cas contraire, on utilise le fait que la fonction spectrale se présente sous la forme d'une cloche plus ou moins piquée dans le domaine où $2m < \omega < 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2}$. Dans cet intervalle, en effet, Π comporte un pôle, le calcul de $\tilde{\Pi}$ fait donc intervenir une intégrale de Cauchy et $FS(\omega)$ prend donc une valeur non-nulle sur tout le domaine en question. Le méson est alors dans un état résonant et sa masse est définie comme l'énergie associée au maximum de la fonction spectrale.

On peut ainsi tracer l'évolution de la masse des mésons pour des températures non-nulles. La figure 5.12 représente l'évolution de la masse des mésons π et σ et de $2m$ en fonction de la température à $\mu = 0$.

À basse température la masse du σ suit la valeur $2m$, ce qui reflète le fait que le méson σ est dans un état quasi-lié de deux quarks. Notons que la masse du σ est très légèrement supérieure à $2m$ ce qui autorise la désintégration du σ en deux quarks même à température nulle. Cela reflète le fait que le modèle NJL ne confine pas. Toutefois, la largeur étant très faible, la cohérence avec la phénoménologie est respectée. Le pion a, quant à lui, une masse très faible caractéristique de sa nature de boson de Goldstone. On remarque un "coude" (discontinuité de la dérivée) dans la courbe de la masse du pion lorsque celle-ci dépasse $2m$. La température à laquelle apparait ce coude

est appelée température de Mott. Elle correspond à l'ouverture du canal de désintégration $\pi \rightarrow \bar{q}q$. Enfin, on constate que les courbes des masses du pion et du σ se superposent à haute température reflétant le fait que ces mésons sont partenaires chiraux et que la symétrie chirale est restaurée à haute température.

5.6 Conclusion

Le modèle NJL permet donc de décrire la brisure spontanée de la symétrie chirale et de calculer des propriétés mésoniques dans le milieu, toutefois il ne rend pas compte du confinement et n'incorpore pas les gluons. Ainsi, afin de pallier ces problèmes, de reproduire les comportements thermodynamiques du plasma de quarks et de gluons obtenus grâce aux simulations sur réseaux et de produire des prédictions nouvelles, il convient d'adopter un modèle plus élaboré.

Chapitre 6

Apport d'éléments de QCD décrivant le confinement et description du modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio

6.1 Les bases du modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio

6.1.1 La boucle de Polyakov

Dans le modèle NJL, la symétrie de jauge locale $SU(3)$ n'est pas imposée et le confinement des quarks n'est donc pas décrit. Pour améliorer le modèle, on ajoute un paramètre d'ordre lié au confinement dû aux gluons. Il s'agit de la boucle de Polyakov, qui dépend du champ de gluons [60, 61]. Lorsque l'on se place dans la jauge de Polyakov où le champ de gluons vaut $A_\mu = \delta_{\mu 0} A_0$, la boucle s'écrit :

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \langle L(\vec{x}) \rangle, \quad (6.1)$$

avec

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^\beta d\tau A_0(\vec{x}, \tau) \right) \quad (6.2)$$

$\mathcal{P} \exp$ étant l'exponentielle ordonnée.

Par la suite, ce paramètre d'ordre sera couplé aux quarks du modèle NJL *via* la dérivée covariante [62]. Dans un premier temps, on considérera la limite de pure jauge, où les quarks sont statiques. L'évolution de la boucle

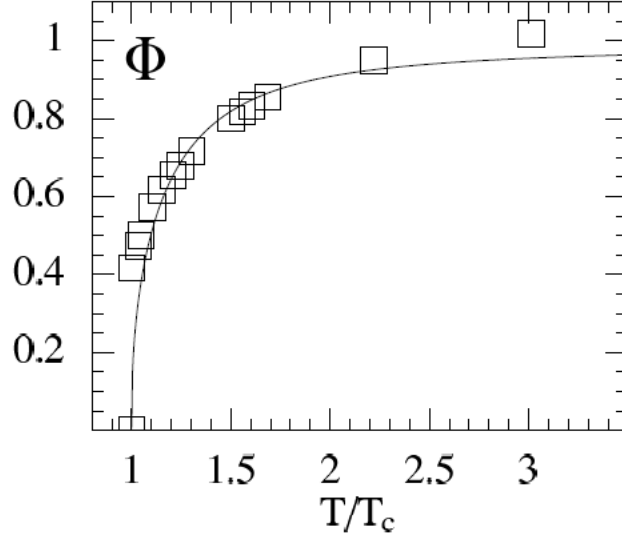


FIG. 6.1 – Boucle de Polyakov en fonction de la température normalisée à la température critique. Le trait plein correspond à la prédiction du modèle et les carrés aux résultats sur réseau [63].

de Polyakov en fonction de la température établie par calcul de QCD sur réseau est représentée figure 6.1.

6.1.2 La symétrie \mathbf{Z}_3

La symétrie associée au centre \mathbf{Z}_3 de $\text{SU}(3)$ est associée au jeu de transformations suivant [64] :

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{-2i\pi k/3}, \quad \bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} e^{2i\pi k/3} \quad (6.3)$$

avec k un entier relatif.

Elle est respectée au niveau du lagrangien et brisée spontanément lors du déconfinement, la valeur moyenne dans le vide de la boucle de Polyakov $\langle \Phi \rangle$ est alors le paramètre d'ordre de la transition de phase associée à la brisure de cette symétrie : elle sépare la phase confinée à basse température, symétrique sous \mathbf{Z}_3 , où les degrés de liberté sont les "glueballs" qui forment des états singulets de couleur, de la phase déconfinée, à haute température, où \mathbf{Z}_3 est brisée spontanément et où les degrés de liberté sont les gluons colorés. Lorsque la dynamique des quarks est incorporée au modèle, il n'y a plus de réelle transition de phase mais une variation rapide de $\langle \Phi \rangle$, traduisant un phénomène de *crossover* qui permet de continuer à considérer deux phases. Dans tous les cas, $\langle \Phi \rangle$ tend vers zéro dans la phase confinée à basse température et prend une valeur non-nulle dans la phase déconfinée à haute température.

Grâce à la boucle de Polyakov, on peut modifier le lagrangien du modèle NJL de manière à y inclure une description du déconfinement.

6.1.3 Le lagrangien de PNJL

Le modèle PNJL consiste à incorporer l'influence des gluons via la boucle de Polyakov au modèle NJL. La dynamique des gluons est alors réduite à un champ statique d'arrière-plan et leur influence se fait ressentir sous la forme d'un potentiel "phénoménologique" qui peut être vu comme la pression exercée par les gluons sur le milieu. Cela permet de décrire à la fois la transition chirale grâce aux bases du modèle NJL et la transition de déconfinement grâce à la boucle de Polyakov. Les gluons sont couplés aux quarks par l'introduction d'une dérivée covariante, et la pression de ces gluons est incorporée au modèle *via* le potentiel "phénoménologique" $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$. Voici l'expression du lagrangien du modèle PNJL :

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \bar{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_0)\Psi + G[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T). \quad (6.4)$$

La dérivée covariante a pour expression : $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$, avec $A^\mu = g_s \mathcal{A}_a^\mu \lambda^a / 2$, \mathcal{A}_a^μ étant les champs de jauge et λ^a les matrices de Gell-Mann. Détaillons l'expression du potentiel effectif $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$.

6.1.4 Le potentiel effectif en pure jauge

La symétrie basée sur le groupe \mathbf{Z}_3 , brisée à haute température et restaurée à basse température, doit être respectée par le potentiel $\mathcal{U}(\bar{\Phi}, \Phi, T)$. Les termes élémentaires pour un tel potentiel sont $\bar{\Phi}\Phi$ et $\Phi^3 + \bar{\Phi}^3$. On utilisera dans un premier temps le potentiel polynomial suivant :

$$\frac{\mathcal{U}_{poly}(\bar{\Phi}, \Phi, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \bar{\Phi}\Phi - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4} (\bar{\Phi}\Phi)^2, \quad (6.5)$$

avec $b_2(T) = a_0 + a_1(\frac{T_0}{T}) + a_2(\frac{T_0}{T})^2 + a_3(\frac{T_0}{T})^3$ et $T_0 = 270$ MeV. Les paramètres T_0 , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , b_3 et b_4 sont fixés pour reproduire les comportements obtenus sur réseau de Φ et des variables thermodynamiques, telles que l'entropie, la densité d'énergie, etc. On utilise le jeu de paramètres suivant :

a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4
6,75	-1,95	2,625	-7,44	0,75	7,5

On représente figure 6.2 le potentiel $\mathcal{U}(\bar{\Phi}, \Phi, T)$ pour deux températures différentes. La symétrie de confinement est associée à la symétrie \mathbf{Z}_3 et on constate sur la figure 6.2 qu'à basse température, le minimum du potentiel $\frac{\mathcal{U}(\bar{\Phi}, \Phi, T)}{T^4}$ est invariant par cette symétrie vu que $\Phi = 0$, ce qui n'est pas le

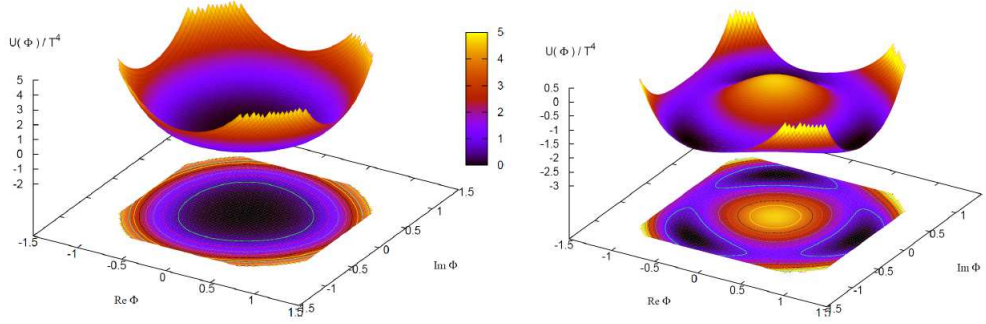


FIG. 6.2 – Forme du potentiel de confinement à basse température à gauche et à haute température à droite.

cas à haute température où les termes Φ^3 et $\bar{\Phi}^3$ deviennent dominants. Ceux-ci creusent le potentiel pour lui donner une forme proche de celle du chapeau mexicain caractéristique des brisures spontanées de symétrie. On distingue alors trois minimums. On a donc une phase confinée à basse température (\mathbf{Z}_3 est respectée, $\Phi \approx 0$) et déconfinée à haute température (\mathbf{Z}_3 est brisée, $\Phi \approx 1$). Dans les deux cas, le potentiel respecte la symétrie, c'est seulement l'état fondamental qui brise \mathbf{Z}_3 . Il s'agit donc d'une brisure spontanée de symétrie. Toutefois, rappelons que \mathbf{Z}_3 est exacte en pure jauge *i.e.* seulement dans le cas où les quarks sont statiques, c'est-à-dire quand ils ont une masse infinie. Le fait que les quarks aient une masse finie et soient dynamiques entraîne une légère brisure explicite de la symétrie \mathbf{Z}_3 de manière analogue à la brisure explicite de la symétrie chirale entraînée par la masse non-nulle des quarks nus m_0 . Φ n'est donc pas rigoureusement un paramètre d'ordre mais reste une grandeur très utile pour caractériser le *crossover* de déconfinement.

On utilisera en parallèle du potentiel polynomial un autre potentiel : le potentiel logarithmique [65] :

$$\frac{\mathcal{U}_{log}(\bar{\Phi}, \Phi, T)}{T^4} = -\frac{a(T)}{2} \bar{\Phi} \Phi + b(T) \ln[1 - 6\bar{\Phi} \Phi + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\bar{\Phi} \Phi)^2], \quad (6.6)$$

avec $a(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2$; $b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3$ et le jeu de paramètres suivants :

a_0	a_1	a_2	b_3
3,51	-2,47	15,2	-1,75

6.2 Les calculs dans le modèle PNJL

6.2.1 Introduction du grand potentiel

La méthode employée pour déterminer les valeurs de la masse habillée m , de la boucle de Polyakov Φ et de sa valeur conjuguée $\bar{\Phi}$ consiste à minimiser le grand potentiel Ω associé à la théorie dans l'approximation du champ moyen. Ce procédé est équivalente à l'approche précédente où l'on étudiait directement l'équation de Dyson dans l'approximation du champ moyen. Son expression, obtenue par des techniques usuelles [66, 67], est la suivante :

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi, \bar{\Phi}, m, T, \mu) = & \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T) + \frac{(m - m_0)^2}{4G} - 2N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \\ & - 2N_f T \int_0^B \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \ln[1 + L^\dagger e^{-(E_p - \mu)/T}] + \text{Tr}_c \ln[1 + L e^{-(E_p + \mu)/T}], \end{aligned} \quad (6.7)$$

avec Tr_c la trace sur la couleur. Le premier terme $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$ correspond à la pression des gluons déterminée de manière phénoménologique. Le second terme $\frac{(m - m_0)^2}{4G}$ représente, quant à lui, l'énergie du vide modifiée par le condensat et les termes suivants correspondent au gaz de fermion à température non-nulle.

Deux cas seront étudiés. Dans le premier, la borne B sur la seconde intégrale prendra comme valeur Λ et dans le second cas, on fera tendre B vers $+\infty$. La deuxième option perd en cohérence avec le calcul des fonctions spectrales, pour lequel on verra que toutes les intégrales sont coupées à Λ , mais permet de retrouver les comportements des variables thermodynamiques obtenus sur réseau [68]. On peut justifier ces approches différentes par les faits suivants. La pression est proportionnelle au nombre de degrés de liberté qui sont les quarks à haute température. Laisser tendre B vers $+\infty$ permet donc de prendre en compte tous les degrés de libertés nécessaires pour retrouver les bons comportements thermodynamiques. D'un autre côté, le comportement des mésons dépend de l'interaction et serait affecté par la liberté asymptotique, d'où la nécessité, dans ce cas, d'imposer $B = \Lambda$. On trace [63] les évolutions de la pression p et de la densité d'énergie ϵ figure 6.3, de la différence de pression figure 6.4 et du nombre de quark figure 6.5. On constate à quel point le modèle PNJL reproduit fidèlement les résultats obtenus sur réseau.

Le fait de combiner le modèle NJL à température nulle et le potentiel effectif $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$ permet donc de disposer d'un modèle décrivant à la fois la coïncidence des transitions chirale et de déconfinement à $\mu = 0$ et le comportement des variables thermodynamiques.

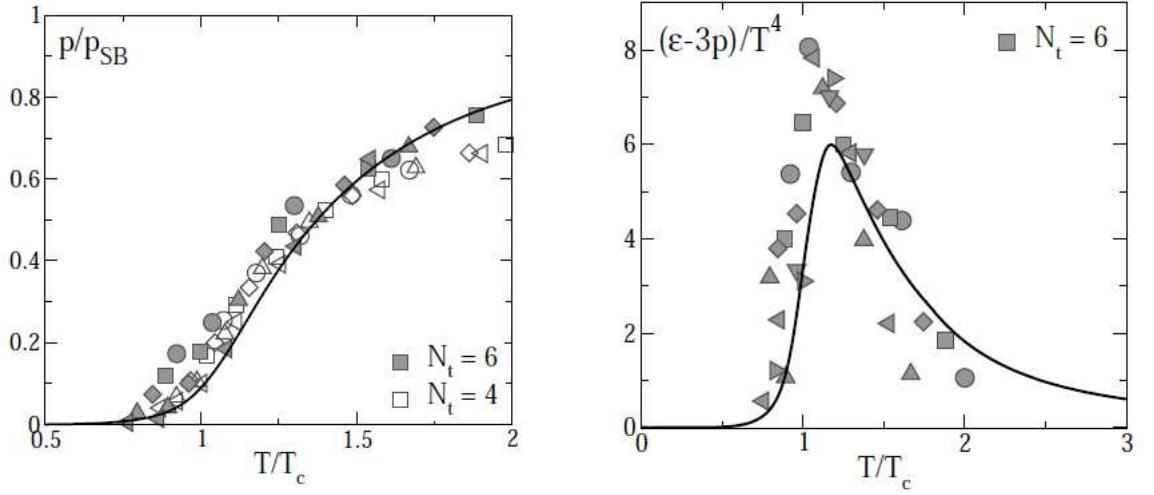


FIG. 6.3 – À gauche, la pression divisée par la pression de Stefan-Boltzmann en fonction de T/T_C à $\mu = 0$. À droite, $(\epsilon - 3p)/T^4$ en fonction de T/T_C . Dans les deux cas, le trait plein correspond au modèle PNJL et les ronds, carrés et triangles aux résultats sur réseau [63].

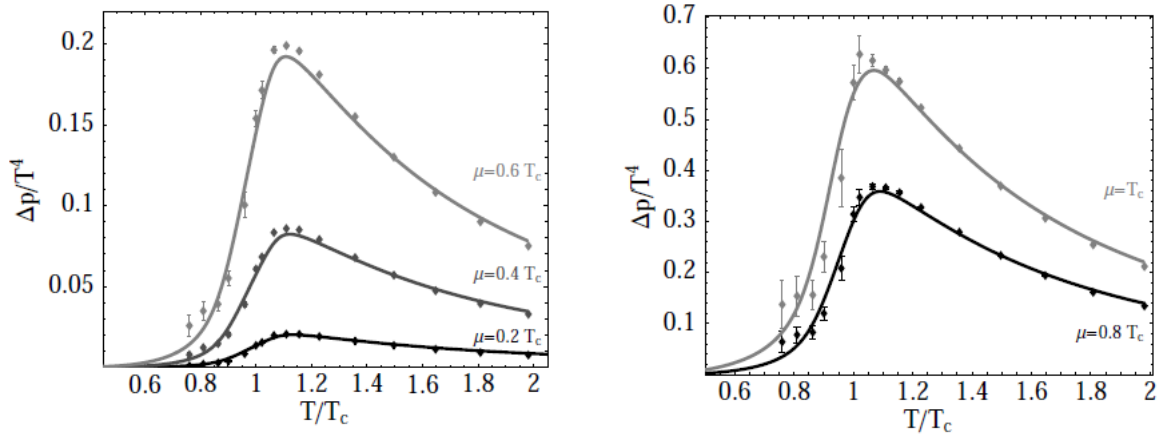


FIG. 6.4 – Différence de pression rééchelonnée en fonction de T/T_C à différents potentiels chimiques, le trait plein correspond au modèle PNJL et les points aux résultats sur réseau [63].

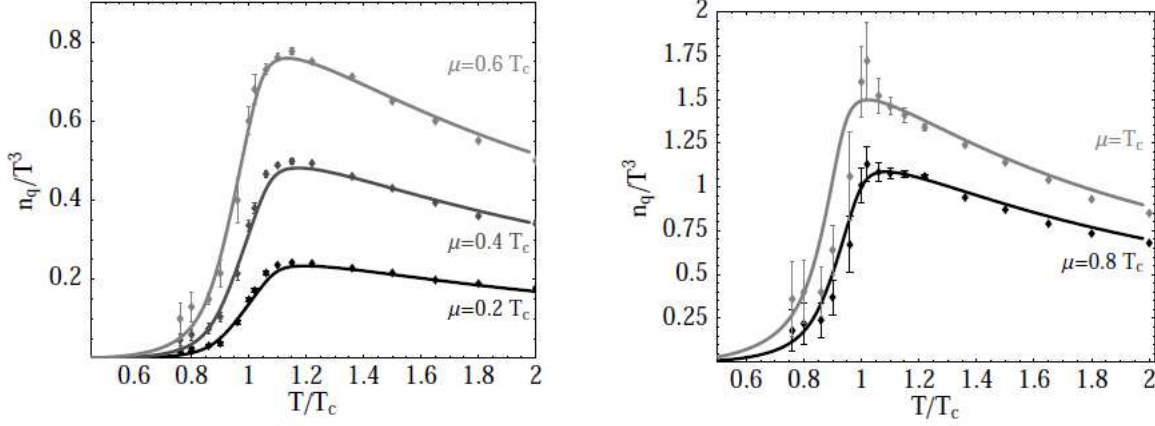


FIG. 6.5 – Nombre de quarks rééchelonné en fonction de T/T_c à différents potentiels chimiques, le trait plein correspond au modèle PNJL et les points aux résultats sur réseau [63].

6.2.2 Les équations de champ moyen

Afin de minimiser Ω , on résoud numériquement les équations de champ moyen :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = 0. \quad (6.8)$$

Comme on le verra dans le chapitre suivant, en définissant

$$\begin{aligned} f_{\Phi}^{+}(E_p) &= \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - E_p + \mu - iA_4} \\ f_{\Phi}^{-}(E_p) &= \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - E_p - \mu + iA_4}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

l'équation $\frac{\partial \Omega}{\partial m} = 0$ s'écrit :

$$m - m_0 = 2GN_f N_c \int_0^{\Lambda} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2m}{E_p} + 2GN_f N_c \int_0^B \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2m}{E_p} [-f_{\Phi}^{+}(E_p) - f_{\Phi}^{-}(E_p)]. \quad (6.10)$$

On retrouve la même forme que l'équation du gap 5.64 en remplaçant formellement $f(E_p - \mu)$ par f_{Φ}^{+} et $f(E_p + \mu)$ par f_{Φ}^{-} et en modifiant éventuellement les bornes des intégrales [69]. En utilisant les égalités suivantes :

$$\text{Tr}_c \ln[1 + L^{\dagger} e^{-(E_p - \mu)/T}] = \ln[1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-(E_p - \mu)/T})e^{-(E_p - \mu)/T} + e^{-3(E_p - \mu)/T}] \quad (6.11)$$

et

$$\text{Tr}_c \ln[1 + L e^{-(E_p + \mu)/T}] = \ln[1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} e^{-(E_p + \mu)/T}) e^{-(E_p + \mu)/T} + e^{-3(E_p + \mu)/T}] \quad (6.12)$$

On peut développer $\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = 0$ et $\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{T^4}{2} (-b_2(T) \bar{\Phi} - b_3 \Phi^2 + b_4 \Phi \bar{\Phi}^2) - 6N_f T \int_0^B \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ & \left[\frac{e^{-2\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(E_p - \mu)}) e^{-\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}} \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\beta(E_p + \mu)}}{1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta(E_p + \mu)}) e^{-\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{T^4}{2} (-b_2(T) \Phi - b_3 \bar{\Phi}^2 + b_4 \bar{\Phi} \Phi^2) - 6N_f T \int_0^B \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ & \left[\frac{e^{-\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(E_p - \mu)}) e^{-\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}} \right. \\ & \left. + \frac{e^{-2\beta(E_p + \mu)}}{1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta(E_p + \mu)}) e^{-\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Le tout constitue donc un système de trois équations à trois inconnues : m , Φ et $\bar{\Phi}$. Reste à expliciter les expressions de f_Φ^+ et de f_Φ^- .

6.2.3 Le propagateur et les fonctions de distributions

Les fonctions f_Φ^+ et f_Φ^- apparaissant dans l'équation du gap proviennent de la nouvelle modification du propagateur. On a vu que la dérivée covariante avait pour expression : $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$, avec $A^\mu = g_s \mathcal{A}_a^\mu \lambda^a / 2$. Cela revient à ajouter au lagrangien le terme suivant : $\bar{\Psi} \gamma^0 A_0 \Psi$. À température finie, on fait la substitution suivante : $A_0 = -iA_4$ ce qui revient, de la même manière que lors de la prise en compte du potentiel chimique, à réécrire le propagateur d'un quark de masse m :

$$S(p) = \frac{1}{\gamma^0(i\omega_n + \mu - iA_4) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m}. \quad (6.15)$$

Des termes du type : $\sum_n \frac{1}{i\omega_n - E_p + \mu - iA_4}$ apparaîtront donc lors du calcul des polarisations et de l'équation du gap.

En calculant explicitement les sommes sur les fréquences de Matsubara dans $f_{\Phi}^{+}(E_p)$ et $f_{\Phi}^{-}(E_p)$, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_{\Phi}^{+}(E_p) &= \frac{(\bar{\Phi} + 2\Phi e^{-\beta(E_p-\mu)})e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-3\beta(E_p-\mu)}}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(E_p-\mu)})e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-3\beta(E_p-\mu)}} \\ f_{\Phi}^{-}(E_p) &= \frac{(\bar{\Phi} + 2\Phi e^{-\beta(E_p+\mu)})e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-3\beta(E_p+\mu)}}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(E_p+\mu)})e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-3\beta(E_p+\mu)}}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dans la phase confinée : $\Phi = \bar{\Phi} = 0$, ce qui se traduit sur les distributions précédentes par la disparition des termes comportant des facteurs de Boltzmann correspondant à un ou deux (anti)quarks : $e^{-\beta(E_p \pm \mu)}$ et $e^{-2\beta(E_p \pm \mu)}$ respectivement. Un confinement statistique apparaît donc au sens où les quarks ne peuvent apparaître que trois par trois ce qui conduit à la formation d'un bain thermique sans couleur. Les expressions 6.16 deviennent alors : $f_{\Phi}^{+}(E_p) = \frac{1}{1 + e^{3\beta(E_p-\mu)}}$ et $f_{\Phi}^{-}(E_p) = \frac{1}{1 + e^{3\beta(E_p+\mu)}}$. Par ailleurs, dans la phase déconfinée, $\Phi \rightarrow 1$ et $\bar{\Phi} \rightarrow 1$ ce qui entraîne $f_{\Phi}(E_p) = f_{NJL}(E_p)$.

6.2.4 Résumé de la procédure employée

Pour résumer, à chaque couple $T - \mu$, le grand potentiel $\Omega(m, \Phi, \bar{\Phi})$ prend une forme différente. On minimise alors ce potentiel. Plus exactement on résout les équations de champ moyen 6.8, ce qui donne accès au triplet $(m, \Phi, \bar{\Phi})$, tout ceci dépendant des paramètres T_0 , $b_2(T)$, b_3 , b_4 , m_0 , Λ et G . On en déduit l'évolution des paramètres $\langle \bar{q}q \rangle$ (calculé à partir de m) et Φ en fonction de T pour différents potentiels chimiques μ .

6.3 Conclusion

On a donc construit un modèle qui reproduit les résultats de la QCD et permet d'obtenir des résultats à μ fini beaucoup plus facilement que sur réseau. De plus, on est désormais capable, grâce à ce modèle, d'interpréter le comportement des observables en terme de quasi-particules.

Troisième partie

Diagramme de phase de QCD dans le modèle PNJL

Le modèle PNJL permet donc de décrire le déconfinement, en plus de la brisure de la symétrie chirale, à l'aide d'outils tels que la boucle de Polyakov issus de la théorie de QCD sur réseaux. L'avantage d'un modèle effectif sur les calculs de type Monte-Carlo effectués sur réseaux, est que les calculs sont plus simples, que la dynamique des quarks peut être intégrée, qu'on manipule directement des variables ayant un sens physique telles que la masse habillée des quarks, la masse des mésons ou la densité de quarks (les calculs sur réseaux faisant intervenir des corrélateurs plutôt que des quasi-particules) et que la zone à haut potentiel chimique est plus directement accessible.

On a vu l'efficacité du modèle à reproduire les données sur réseau à potentiel chimique nul. Un résultat important des réseaux est que les transitions chirale et de déconfinement coïncident à quelques MeV près lorsque $\mu = 0$. Le grand intérêt du modèle sera désormais d'étendre ces prédictions au cas d'un potentiel chimique fini tout en considérant les quarks dynamiques.

Chapitre 7

Tracé du diagramme de phase à l'aide des paramètres d'ordre

7.1 Étude des paramètres d'ordre

7.1.1 Évolution en fonction de la température et du potentiel chimique

On trace sur la figure 7.1 le condensat normalisé $\langle \bar{q}q \rangle_n = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle_{|T=0}}$ et Φ en fonction de la température pour différents potentiels chimiques. Ce sont les paramètres d'ordre des transitions chirale et de déconfinement respectivement. On définit la température caractéristique de transition comme la température pour laquelle le paramètre d'ordre connaît un point d'inflexion, c'est-à-dire lorsque la dérivée du paramètre d'ordre est extrémale. On constate que, lorsque $\mu = 0$, $\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle_{|T=0}}$ passe de 1 à 0 lorsque la température augmente avec une température caractéristique de 278 MeV et on remarque que Φ passe de 0 à 1 avec une température caractéristique assez proche : $T_c = 254$ MeV. On en conclut qu'à potentiel chimique nul, la restauration de la symétrie chirale et le déconfinement se produisent à la même température à 10% près, comme cela a déjà été vu lors des calculs sur réseaux. C'est l'un des premiers grands succès du modèle PNJL : en couplant le secteur NJL dont les paramètres sont choisis pour reproduire le spectre de masse mésonique à $T = 0$ avec le potentiel phénoménologique $\mathcal{U}(\Phi, T)$ qui est ajouté sur le secteur de pure jauge (deux secteurs très différents), on obtient ce résultat important des calculs sur réseau que constitue cette coïncidence. Lorsque μ prend une valeur non nulle, la transition de déconfinement est moins abrupte et les températures caractéristiques pour $\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle_{|T=0}}$ et pour

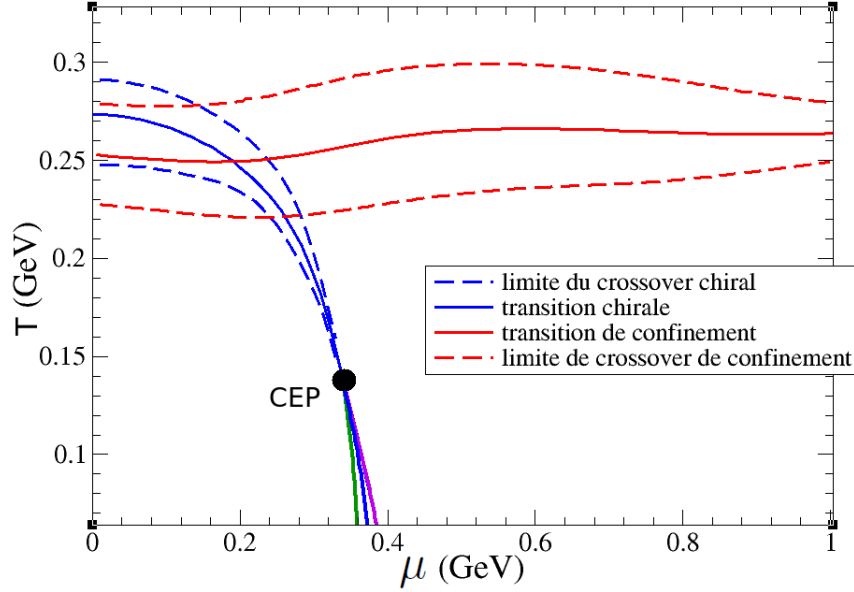


FIG. 7.1 – Les traits pleins correspondent au condensat et les pointillés à Φ , les courbes sont rouges pour $\mu = 0$, bleues pour $\mu = 0,3$ GeV et vertes pour $\mu = 0,36$ GeV.

Φ deviennent plus faibles et plus éloignées l'une de l'autre. Enfin, la courbe représentant le condensat de quarks est multivaluée pour $\mu = 0.36$ GeV caractérisant une transition de phase du premier ordre. On notera que, contrairement au condensat, on a représenté une seule valeur de Φ dans la zone aux alentours de $T = 0,11$ GeV ce qui se traduit par un coude (discontinuité de la dérivée). Cette zone de température n'apporte, en effet, pas d'information physique pertinente concernant le déconfinement comme on le verra au chapitre 7.1.6.

Intéressons-nous maintenant à l'influence du choix de la borne B sur le condensat et la boucle de Polyakov.

7.1.2 Influence du schéma de coupure des intégrales

On compare figure 7.2 l'évolution du condensat et de Φ pour les deux schémas de coupure : $B = \Lambda$ et $B = +\infty$ à $\mu = 0$. On observe que les transitions chirale et de déconfinement se produisent à une température plus faible si on laisse la coupure sur les intégrales B tendre vers $+\infty$. Les températures critiques de transition chirale et de déconfinement sont cette fois-ci de 230 MeV et 219 MeV respectivement à comparer à 278 MeV et 254 MeV lorsque $B = \Lambda$. De plus, les transitions s'effectuent plus abruptement si $B \rightarrow +\infty$ signe d'un rapprochement de comportement avec une transition de second ordre. La raison est que, comme on l'a vu, les quarks dynamiques brisent la

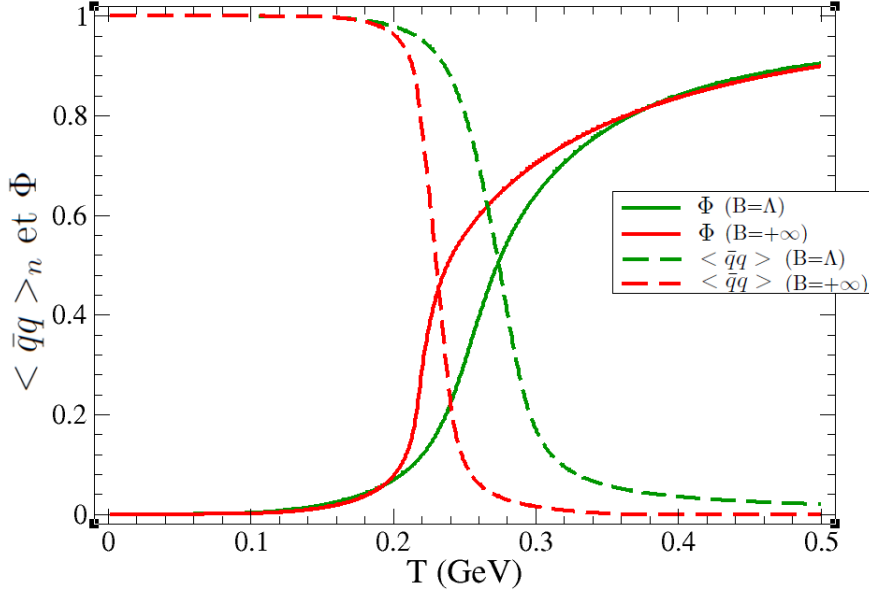


FIG. 7.2 – Comparaison à $\mu = 0$ de l'évolution du condensat (en pointillés) et de Φ (en traits pleins) pour $B = \Lambda$ (en vert) et pour $B = +\infty$ (en rouge).

symétrie \mathbf{Z}_3 associée au confinement. En ne coupant pas les impulsions des quarks thermiques à Λ , on ajoute une contribution qui tend à briser plus brutalement la symétrie d'où l'augmentation plus rapide de Φ .

Sur la figure 7.3, on représente l'évolution du condensat et de Φ pour $\mu = 0, 37$ GeV. Ici, on ne représente que les solution stables, ce qui permet de visualiser la discontinuité. Une section entière sera consacrée à l'étude de la métastabilité. En laissant tendre B vers $+\infty$, la transition de déconfinement se produit plus tôt comme lorsque $\mu = 0$ mais la transition chirale apparaît quant à elle légèrement plus tard.

On notera que lorsqu'on fait tendre B vers $+\infty$, un ajustement doit être fait lors de la résolution des équations de champs moyen. À une température donnée, $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, ce qui indique une restauration complète de la symétrie chirale (au sens où $m = m_0$). Au-delà, on utilise la technique habituelle dans ce cas, consistant à fixer $\langle \bar{q}q \rangle$ à 0. En effet, on estime qu'une fois la restauration de la symétrie atteinte, la masse des quarks doit rester égale à m_0 .

Voyons, ensuite, l'influence du choix du potentiel effectif.

7.1.3 Influence du choix du potentiel effectif

On compare sur la figure 7.4 l'évolution des deux paramètres d'ordre en fonction de la température pour le potentiel effectif polynomial et pour le potentiel logarithmique dans le cas où $B = \Lambda$. On constate que le potentiel

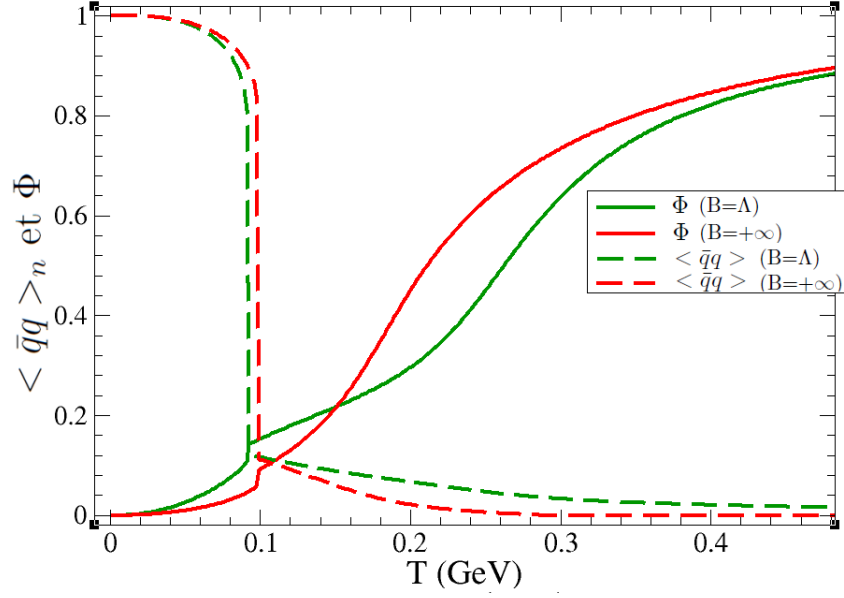


FIG. 7.3 – Comparaison à $\mu = 0,37$ GeV de l'évolution du condensat (en pointillés) et de Φ (en traits pleins) pour $B = \Lambda$ (en vert) et pour $B = +\infty$ (en rouge).

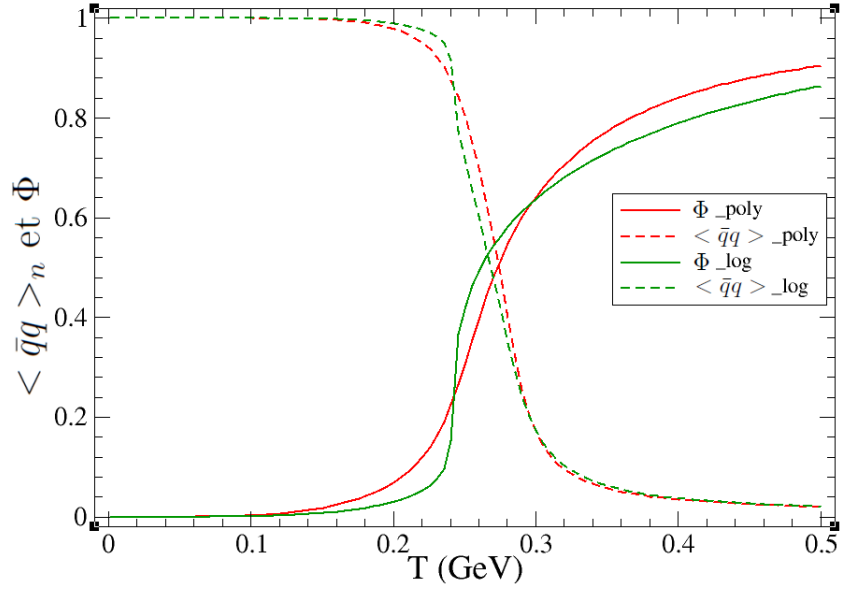


FIG. 7.4 – Comparaison à $\mu = 0$ de l'évolution du condensat (en pointillés) et de Φ (en traits pleins) pour le potentiel polynomial (en rouge) et pour le potentiel logarithmique (en vert) dans le cas où $B = \Lambda$.

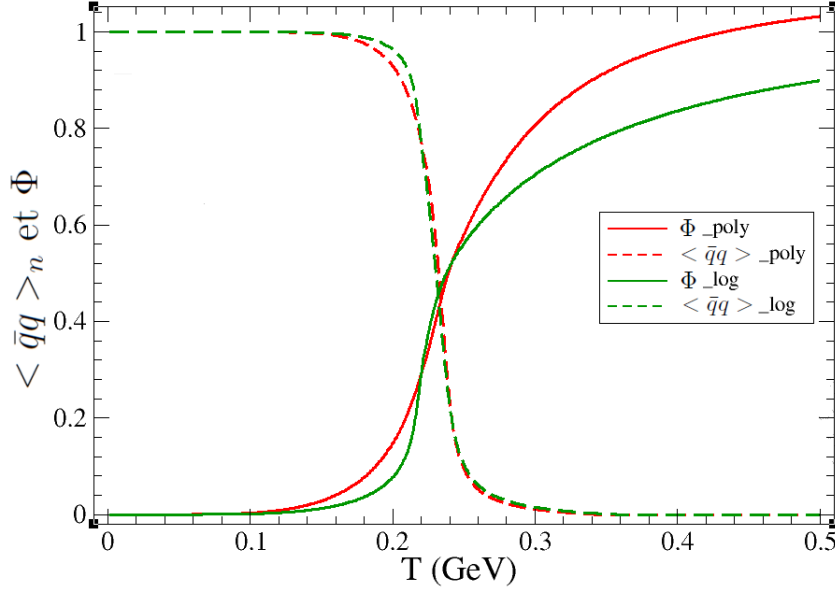


FIG. 7.5 – Comparaison à $\mu = 0$ de l'évolution du condensat (en pointillés) et de Φ (en traits pleins) pour le potentiel polynomial (en rouge) et pour le potentiel logarithmique (en vert) avec $B = +\infty$.

logarithmique entraîne une transition plus abrupte que pour le potentiel polynomial, la température critique se retrouve ainsi légèrement décalée vers les basses températures. Même constat lorsque $B = +\infty$, voir figure 7.5. On remarque que, dans ce dernier cas, les transitions chirales coïncident encore plus exactement que lorsque $B = \Lambda$. Dans tout ce qui suit, lorsque rien n'est précisé, les courbes seront tracées pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{poly}}$.

7.1.4 Zone de métastabilité

On a vu que pour délimiter la zone de symétrie chirale brisée de celle où la symétrie est restaurée, on pouvait prendre comme point limite le point d'inflexion de la courbe du condensat en fonction de la température, ceci pour chaque potentiel chimique. Le point limite correspond donc, dans ce cas, au minimum de $\frac{d\langle \bar{q}q \rangle}{dT}$ à μ fixé. Cette approche est seulement valable à bas potentiel chimique. En effet, dans ce cas, à chaque potentiel chimique correspond bien une seule valeur de $\langle \bar{q}q \rangle$. Ce n'est plus le cas à haut potentiel chimique car la fonction $\langle \bar{q}q \rangle(T)$ est alors multivaluée. Détaillons la méthode employée dans ce derniers cas.

Rappelons que pour chaque couple température - potentiel chimique (correspondant à un point du diagramme de phase), le grand potentiel présente une forme différente et donc un minimum différent vis-à-vis du

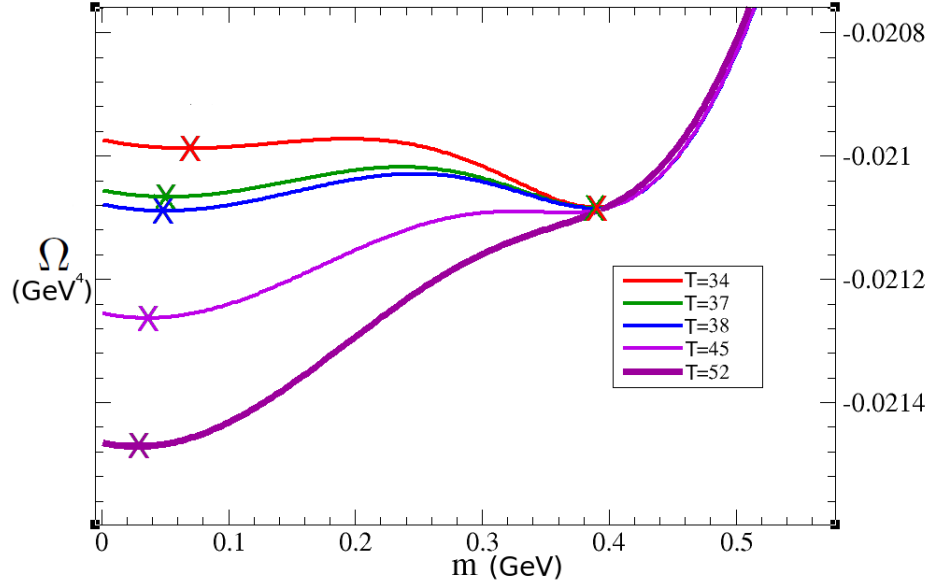


FIG. 7.6 – $\Omega(m)$, Φ et $\bar{\Phi}$ fixés pour différentes températures en MeV avec $\mu = 0, 3 + 2T$.

jeu de variables m , Φ et $\bar{\Phi}$. À haut μ , $\Omega(m)$ présente deux minimums locaux au fond de deux puits de potentiel comme illustré sur la figure 7.6 où l'on a tracé $\Omega(m)$ avec Φ et $\bar{\Phi}$ fixés pour différentes températures avec à chaque fois $\mu = 0, 3 + 2T$. Cette forme du potentiel à deux puits est caractéristique d'une zone de métastabilité. On a donc trois solutions à l'équation $\frac{\partial \Omega}{\partial m} = 0$: les deux minimums et le maximum qui correspond à une solution instable. On remarque que si la température augmente, le deuxième puit de potentiel autour de $m = 0, 4$ GeV se fait moins profond jusqu'à ce que le minimum finisse par disparaître comme c'est le cas pour $T = 52$ MeV.

Pour définir le point de transition dans le diagramme de phase, nous allons fixer T au lieu de μ et tracer $\mu(m)$. Chaque point de la figure 7.7 est tracé en fixant T et m et en minimisant Ω par rapport à μ , Φ et $\bar{\Phi}$. On constate que pour certains potentiels chimiques comme μ_0 sur la figure, il existe trois solutions à l'équation $\mu(m) = \mu_0$. Deux sont métastables ou stables, on les note m_1 et m_2 et une est instable, on la note m_3 . Afin de déterminer quelle solution est stable parmi m_1 et m_2 , on trace le grand potentiel en fonction de μ . Sur la figure 7.8, on représente ainsi $\Omega(\mu)$ pour $T = 100$ MeV. Lorsque μ est fixé, les trois solutions correspondent aux trois branches du grand potentiel. La branche supérieure correspond aux solutions instables et les deux autres correspondent aux solutions stables ou métastables selon la valeur du potentiel : la solution de grand potentiel minimal est stable tandis que l'autre solution est métastable.

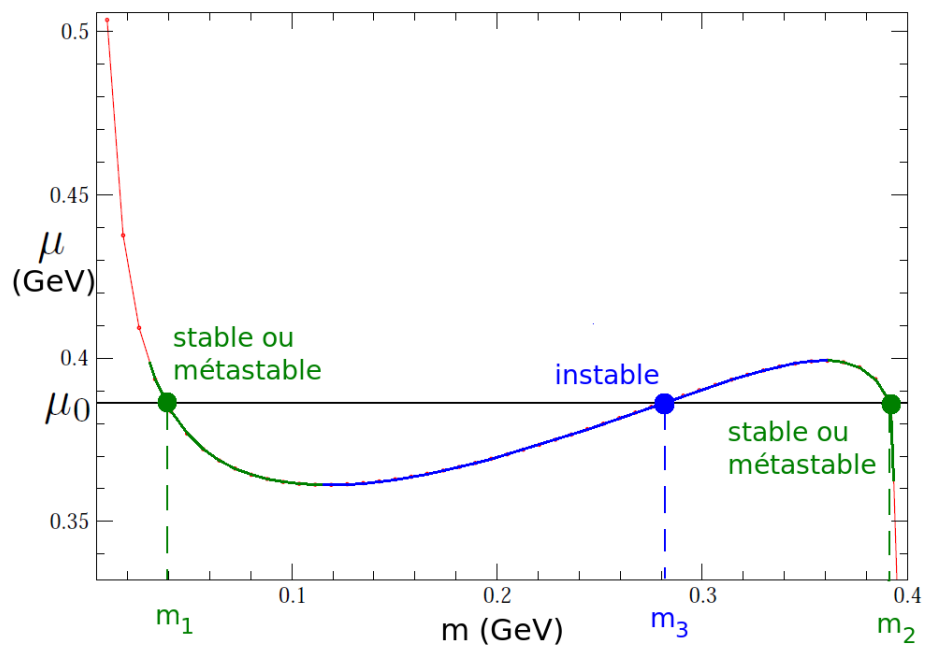


FIG. 7.7 – $\mu(m)$ pour $T = 50$ MeV.

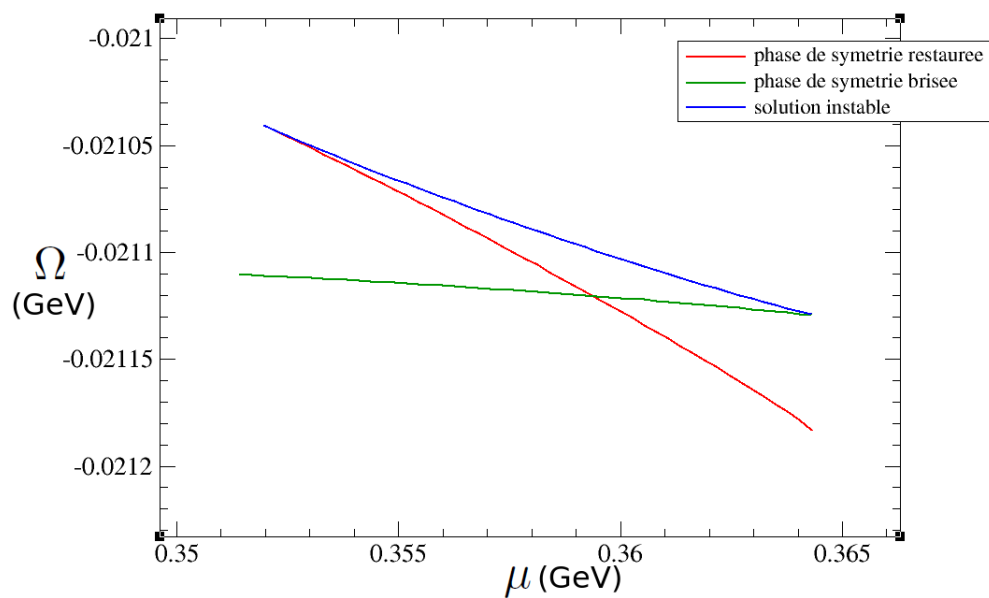


FIG. 7.8 – $\Omega(\mu)$ pour $T = 100$ MeV.

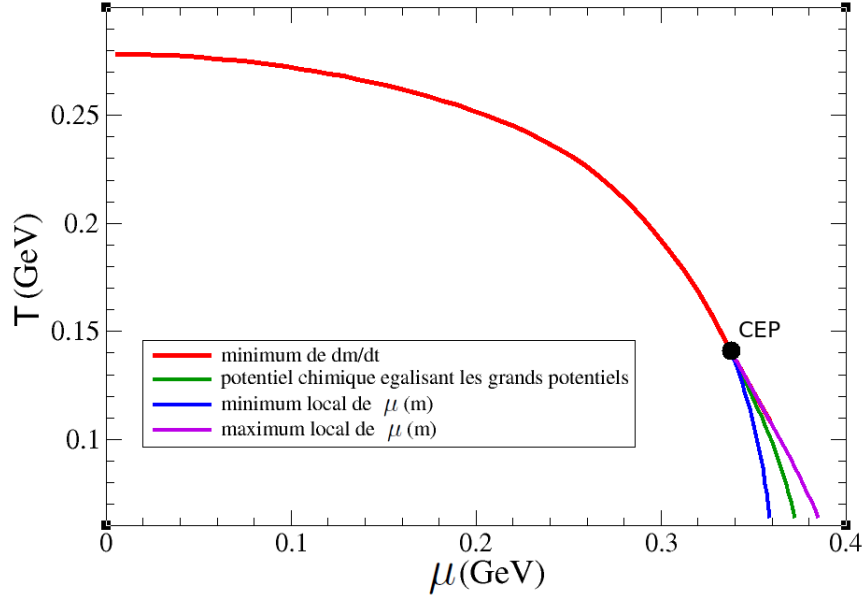


FIG. 7.9 – Transition chirale calculée en minimisant dm/dT en rouge et en trouvant le potentiel réalisant $\Omega(m_1) = \Omega(m_2)$ en vert. Les branches bleue et violette sont les limites de la zone de métastabilité et correspondent aux minimum et maximum locaux de $\mu(m)$.

On est donc en présence d'une transition de premier ordre et le potentiel chimique de transition est celui pour lequel $\Omega(m_1) = \Omega(m_2)$, ce qui correspond au potentiel chimique pour lequel les branches se croisent sur la figure 7.8. On trouve ainsi, pour une température donnée, le potentiel chimique correspondant à la transition, ce qui permet de placer un point de transition sur le diagramme de phase $T - \mu$. On peut également tracer les lignes de métastabilité qui correspondent aux minimum et maximum locaux de la courbe 7.7.

On a donc une phase à symétrie chirale brisée à bas potentiel chimique et basse température et une phase à symétrie chirale restaurée à haut potentiel chimique et haute température. À bas potentiel chimique, la transition entre les deux phases est un *crossover* : le condensat passe continument d'une grande valeur à une faible valeur. Tandis qu'à haut potentiel chimique, la transition est abrupte et constitue une véritable transition de phase du premier ordre. Le point limite entre les deux transitions est appelé le point critique.

7.1.5 Le point critique

Le point critique qu'on note souvent CEP comme "Critical End Point" sépare la zone à haut potentiel chimique et basse température, où la transi-

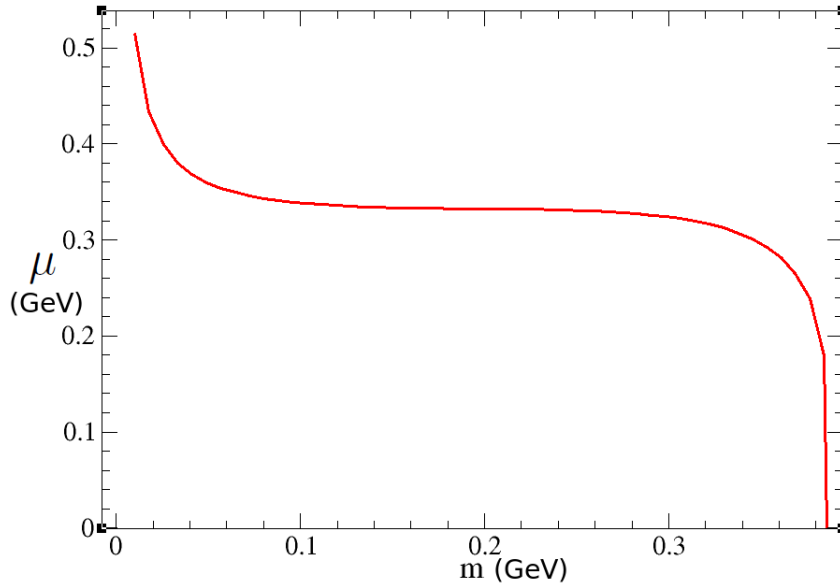


FIG. 7.10 – Potentiel chimique en fonction de m à la température du point critique.

tion chirale est du premier ordre (c'est-à-dire lorsque $m(\mu)$ est multivaluée) de la zone à bas potentiel chimique et haute température où la transition n'est plus qu'un *crossover* [70, 71, 72, 73]. Sur la figure 7.9, le CEP se situe à l'intersection des courbes bleue et violette. On calcule sa position en repérant la température pour laquelle le potentiel chimique ne comporte qu'une seule dérivée nulle. C'est le cas limite entre un profil $\mu(m)$ strictement décroissant valable à haute température lorsque la transition est un *crossover* et un profil comportant un minimum et un maximum local. La figure 7.10 représente ce profil limite tracé lorsque $T = T_{CEP}$. Le potentiel chimique du point critique μ_{CEP} est alors celui du point de dérivée nulle. L'étude de ce point critique permet d'étudier la taille de la région critique dans le diagramme de phase. On constate que cette région peut s'étendre assez largement, en particulier dans le modèle PNJL où le *crossover* est rapide et se rapproche d'une transition de deuxième ordre. La région critique est ainsi plus étendue en PNJL qu'en NJL [74, 75].

Le tableau suivant donne sa position dans les quatre schémas décrit précédemment : $B = \Lambda$ ou $+\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$ ou \mathcal{U}_{log} .

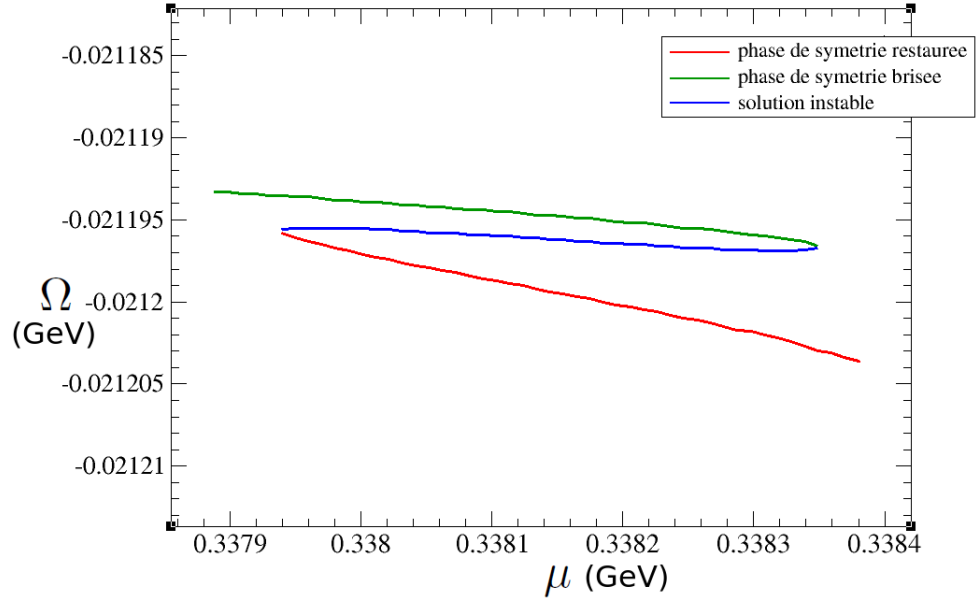


FIG. 7.11 – $\Omega(\mu)$ pour $T = 140$ MeV.

	$B = \Lambda$	$B = +\infty$
\mathcal{U}_{poly}	$T_{CEP} = 144$ MeV $\mu_{CEP} = 336$ MeV	$T_{CEP} = 133$ MeV $\mu_{CEP} = 328$ MeV
\mathcal{U}_{log}	$T_{CEP} = 169$ MeV $\mu_{CEP} = 329$ MeV	$T_{CEP} = 160$ MeV $\mu_{CEP} = 312$ MeV

On constate que le fait de laisser B tendre vers $+\infty$ rapproche le point critique de l'origine du diagramme de phase. L'utilisation du potentiel logarithmique, quant à elle, fait augmenter T_{CEP} mais baisser μ_{CEP} .

Après ce point, la transition est du premier ordre et la ligne de transition est donnée par $\Omega(m_1) = \Omega(m_2)$ sauf pour une courte zone juste après le point critique où cette dernière équation n'a pas de solution. En effet les branches métastables ne se croisent pas dans cette zone comme indiqué sur la figure 7.11. En zoomant près du point critique, on constate en effet sur la figure 7.12 que la zone de transition de premier ordre en vert rejoint l'une des deux branches métastables avant le CEP.

L'étude du grand potentiel nous a permis de tracer en détail la transition chirale. Penchons-nous désormais sur la transition de déconfinement.

7.1.6 Transition de déconfinement

Le paramètre d'ordre associé au déconfinement est la boucle de Polyakov Φ . On délimite ainsi la zone confinée de la zone déconfinée par le point d'inflexion de $\Phi(T)$ c'est à dire par le maximum de $\frac{d\Phi}{dT}$. Pour certains po-

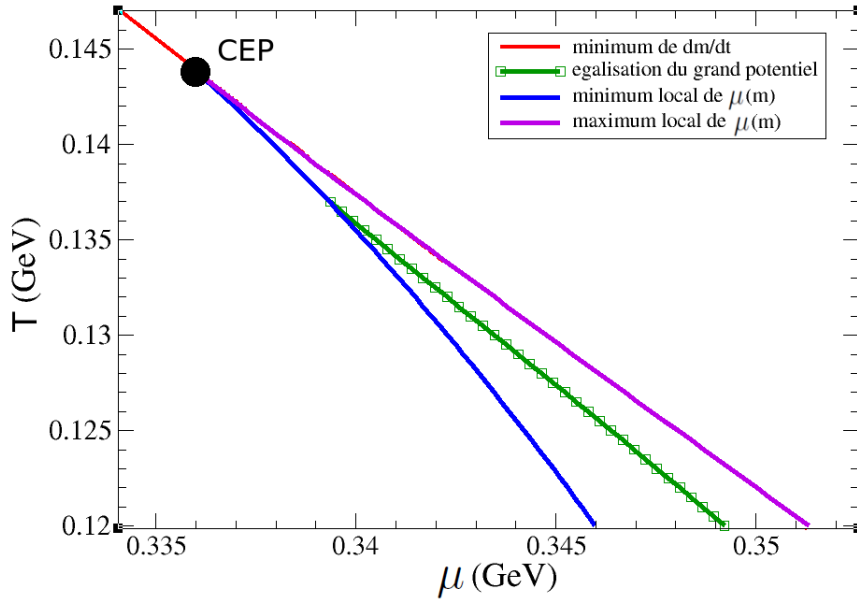


FIG. 7.12 – Transition chirale calculée en minimisant dm/dT en rouge et en trouvant le potentiel réalisant $\Omega(m_1) = \Omega(m_2)$ en vert. Les branches bleue et violette sont les limites de la zone de métastabilité et correspondent aux minimum et maximum locaux. Le point noir correspond au point critique ou CEP.

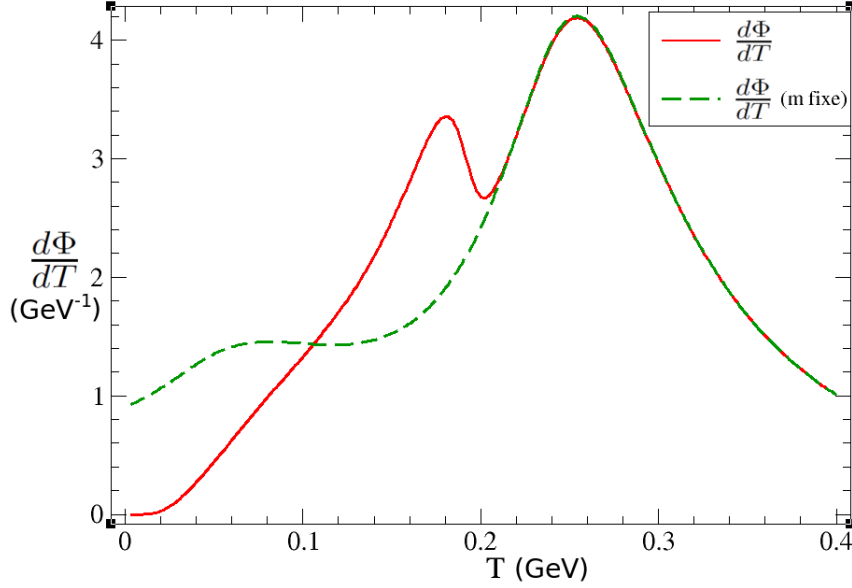


FIG. 7.13 – $\frac{d\Phi}{dT}$ en fonction de T pour $\mu = 0, 3$ GeV

tentiels chimiques, un problème se pose : la fonction $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ comporte deux maximums comme représenté sur les figures 7.13 et 7.14. Le premier pic dans 7.14 correspond à l'influence de la transition chirale dont la présence se répercute sur l'évolution de Φ . Cette discontinuité correspond à une augmentation brutale mais très petite de Φ (moins de 0.1). Le pic n'est donc pas intéressant lors de l'étude du déconfinement car toute l'information physique associée à ce pic est déjà contenue dans le condensat : le maximum qui a du sens est celui de la bosse et c'est la température de ce maximum qui sera prise comme température de déconfinement. Afin de ne prendre en compte que le maximum de cette bosse pour la transition de déconfinement, on se débarrasse du pic en fixant m à m_0 . Cela se justifie par le fait que la valeur de m , qu'elle soit de 300 MeV ou de 10 MeV, n'a que peu d'influence sur Φ . Il faudrait une masse très grande devant 1 GeV (c'est-à-dire un quark quasiment statique comme en pure jauge) pour forcer la brisure de \mathbf{Z}_3 . On obtient alors une courbe quasiment similaire, le pic ayant disparu.

On trace les mêmes courbes figure 7.15 avec, cette fois-ci, $\mu = 0$. On remarque que les bosses de déconfinement et de transition chirale se recouvrent et que les effets de chaque transition sont faciles à découpler en fixant $m = m_0$. On en conclut que la position de la transition de déconfinement à $\mu = 0$ n'est pas influencée par la position de la transition chirale. On peut, en effet, forcer la chiralité à être brisée ou restaurée, la transition de déconfinement ne bouge pas pour autant. La réciproque est toutefois fautive : la température de transition chirale étant effectivement influencée

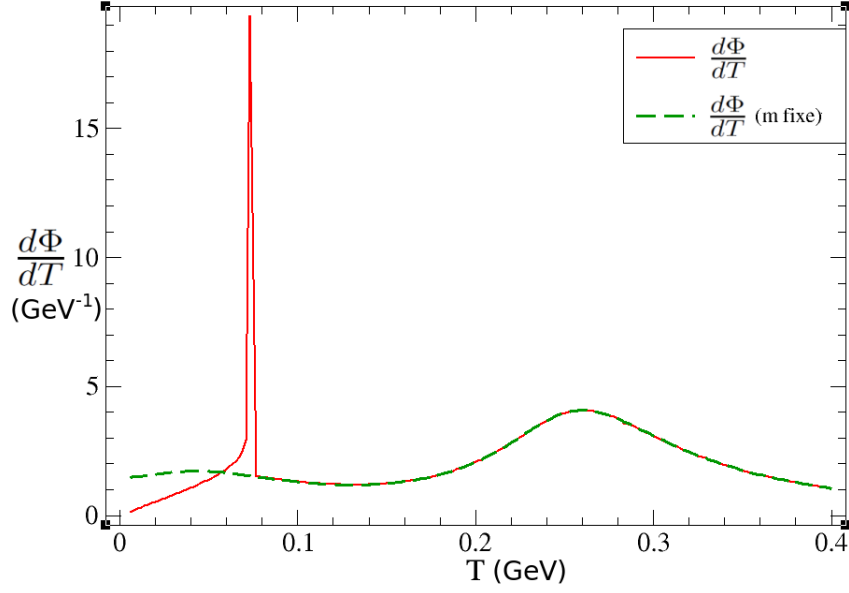


FIG. 7.14 – $\frac{d\Phi}{dT}$ en fonction de T pour $\mu = 0,38 \text{ GeV}$

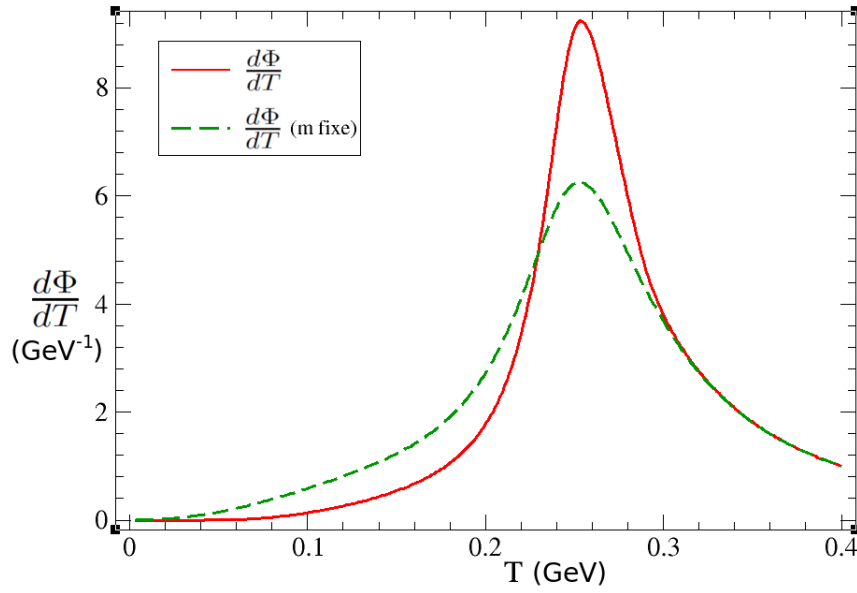


FIG. 7.15 – $\frac{d\Phi}{dT}$ en fonction de T pour $\mu = 0$

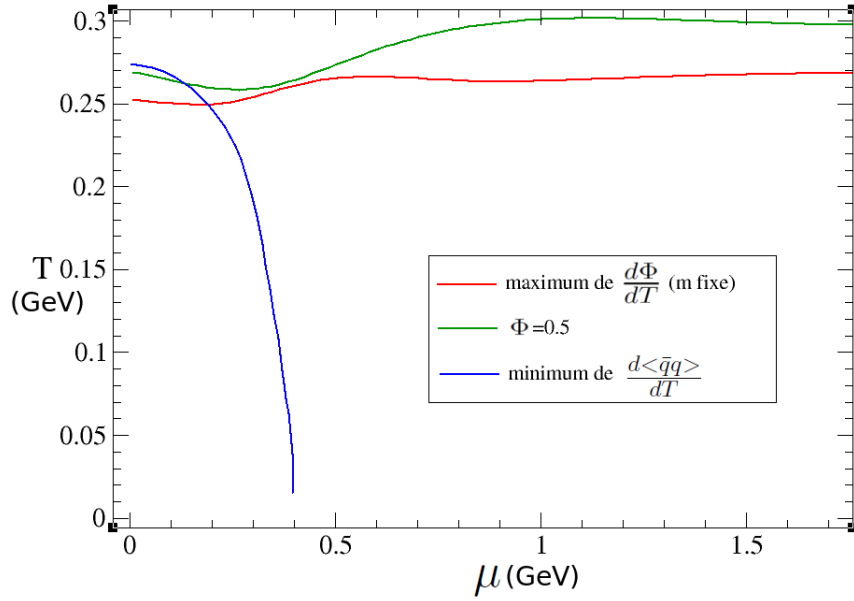


FIG. 7.16 – Transition chirale et transition de déconfinement pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

par la transition de déconfinement.

On peut désormais tracer le diagramme de phase $T - \mu$ en positionnant à la fois la transition chirale et la transition de déconfinement.

7.2 Tracé des diagrammes de phase

7.2.1 Diagramme $T - \mu$ pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

Sur la figure 7.16, on représente les transitions définies précédemment pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$ ainsi que la courbe pour laquelle $\Phi(T, \mu) = 0,5$, Φ prenant des valeurs comprises entre 0 et 1. Les deux transitions délimitent trois grandes zones sur le diagramme de phase. Une phase confinée à symétrie chirale brisée à basse température et à bas potentiel chimique : cette phase est celle de la matière hadronique ordinaire ; une phase déconfinée et à symétrie chirale restaurée à haute température : cette phase est celle du plasma de quarks et de gluons et une phase à haut potentiel chimique mais à température raisonnable où les quarks sont encore confinés et où la symétrie chirale est restaurée. Cette nouvelle phase sera appelée phase CCS comme "confined and chiral symmetric". Elle pourrait correspondre à la phase quarkyonique [76] qui est une hypothèse concernant la structure de phase de QCD dans l'approximation où $N_c \rightarrow +\infty$.

On constate également l'existence d'une petite zone à bas potentiel chi-

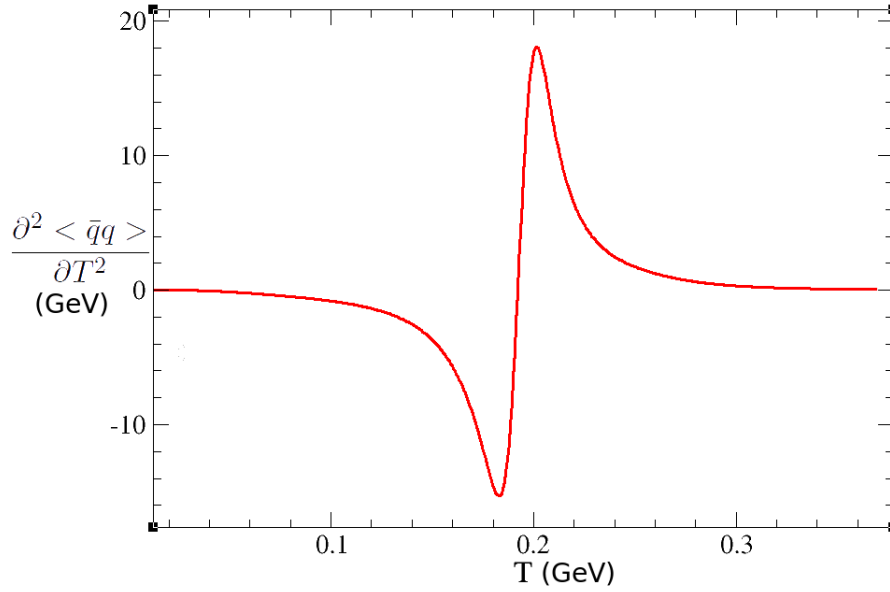


FIG. 7.17 – Dérivée seconde du condensat en fonction de T à $\mu = 0,3$ GeV.

mique autour d'une température de 250 MeV où la symétrie chirale n'est pas totalement restaurée mais où le déconfinement se fait déjà sentir. Cela ne rend pas compte de l'existence d'une nouvelle phase étant donnée la douceur des transitions en question. Une manière de le quantifier est de tracer la dérivée seconde du condensat $\frac{\partial^2 \langle \bar{q}q \rangle}{\partial T^2}$ en fonction de T (voir figure 7.17) et de considérer que la transition chirale démarre au minimum de cette fonction et se termine au maximum. On retrace ainsi la transition chirale dans le diagramme $T - \mu$ entourée des lignes de début et de fin de cette transition : voir figure 7.18. Cette zone intermédiaire de transition est également présente pour le déconfinement ce qui permet de conclure que les deux transitions se produisent plus ou moins en même temps et qu'il n'existe pas de zone déconfinée à symétrie chirale brisée dans le diagramme de phase.

7.2.2 Diagramme $T - \mu$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

Dans le cas où $B = +\infty$, Φ dépasse 1 à haute température, voir figure 7.19. On prendra donc comme critère secondaire de déconfinement $\Phi = \Phi(T = 0,6 \text{ GeV})/2$ au lieu de $\Phi = 0,5$, la température 0,6 GeV étant prise arbitrairement comme une température à laquelle Φ a atteint le plateau de haute température.

Pour ce qui est du critère correspondant au maximum de $\frac{d\Phi}{dT}(T)$, il n'est pas possible de l'appliquer à tous les potentiels chimiques. À bas potentiel

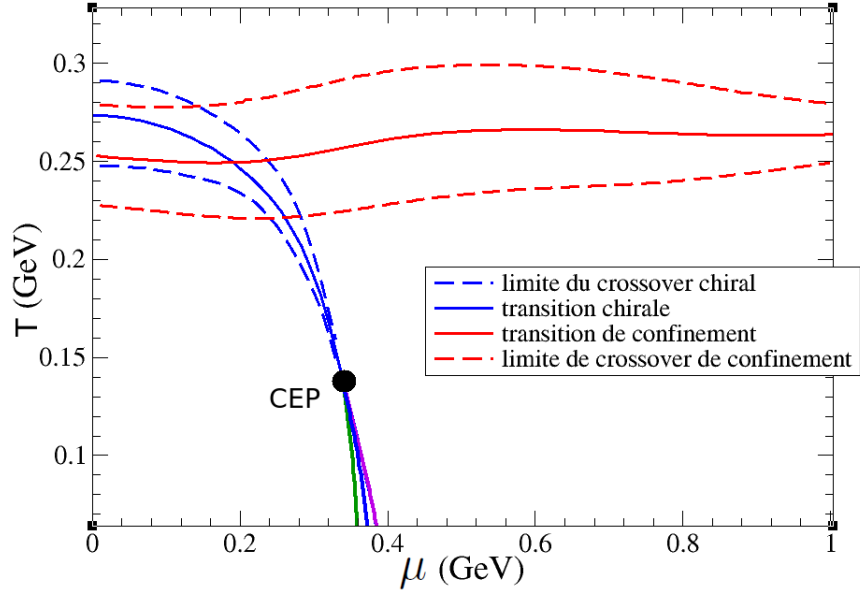


FIG. 7.18 – Diagramme de phase incluant les zones de crossover.

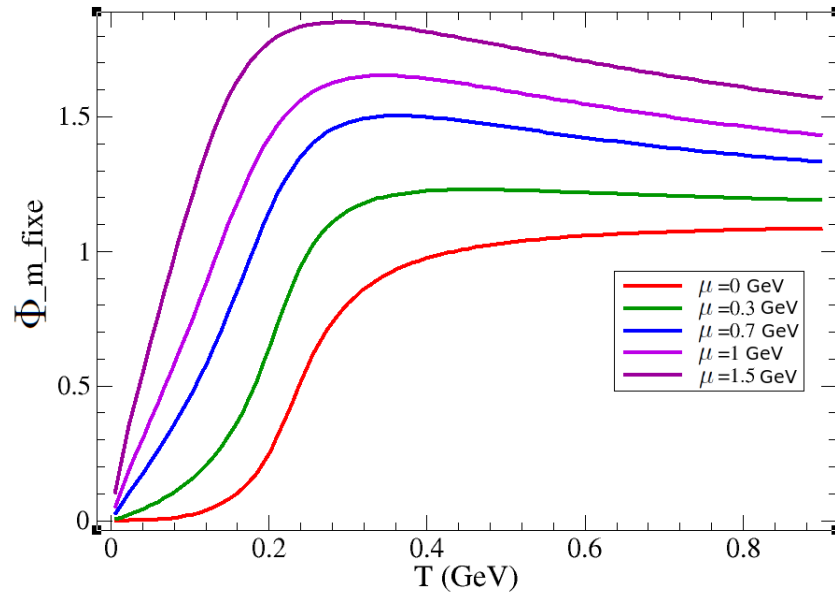


FIG. 7.19 – $\Phi(T)$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

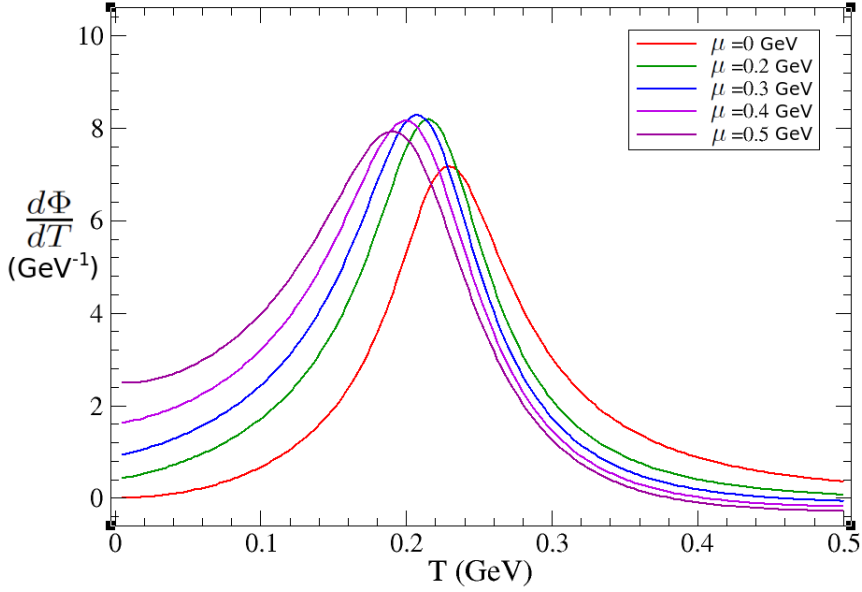


FIG. 7.20 – $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

chimique, $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ présente bien un maximum comme pour le cas $B = \Lambda$, voir figure 7.20. À plus haut potentiel chimique, la forme de $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ change et un minimum apparaît, voir figure 7.21. Enfin, à très haut potentiel chimique, les extremums locaux disparaissent, voir figure 7.22. Ainsi, le diagramme de phase est quelque peu différent de celui pour $B = \Lambda$, voir figure 7.23. On constate que quelque soit le critère de déconfinement, la transition de déconfinement apparaît à plus basse température si $B = +\infty$: les lignes de transition qui étaient quasiment horizontales pour $B = \Lambda$, tendent, ici, à se rapprocher de l'axe des abscisses lorsque le potentiel chimique augmente. Le point où les courbes rouge et violette se rejoignent correspond au potentiel chimique pour lequel les minima locaux disparaissent ($\mu = 1,3$ GeV sur la figure 7.22).

Il est très intéressant de constater que l'étude indique la présence d'un déconfinement à basse température et haut potentiel chimique. Une raison pourrait être le fait que le terme $\mu\bar{\Psi}\Psi$ brise la symétrie \mathbf{Z}_3 . Cette indication pourrait se révéler utile pour l'étude des étoiles compactes.

7.2.3 Diagramme $T - \mu$ pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$

Traçons figure 7.24, le diagramme de phase pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. Les lignes de transitions obtenues sont assez proches de celles obtenues pour le potentiel polynomial.

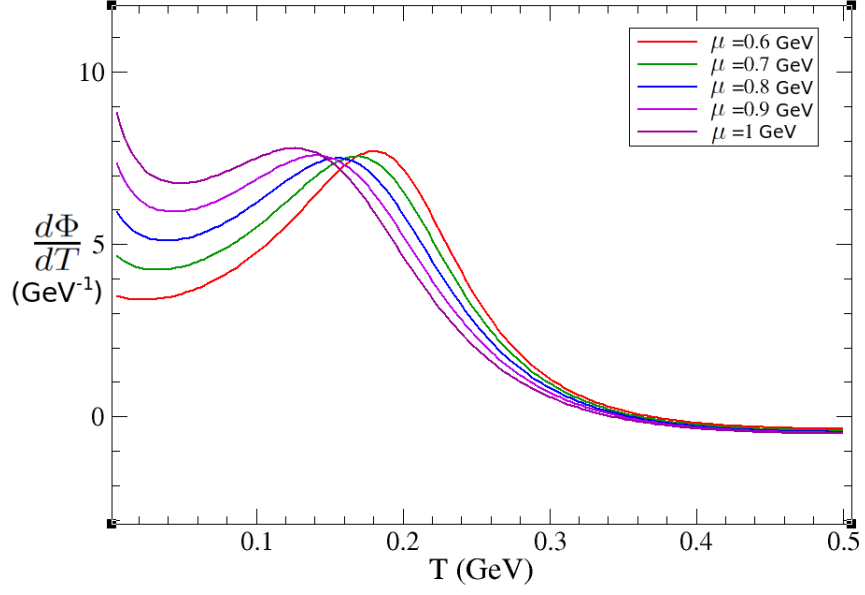


FIG. 7.21 – $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

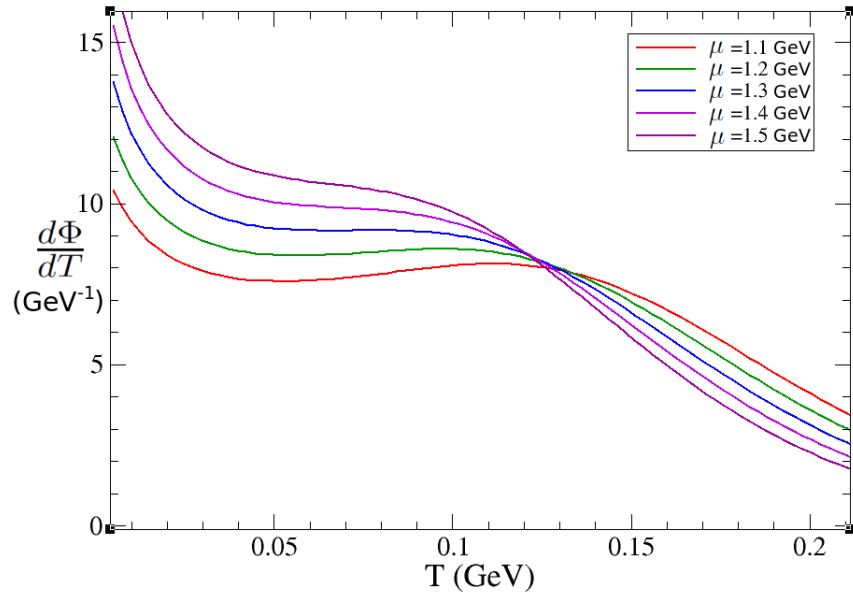


FIG. 7.22 – $\frac{d\Phi}{dT}(T)$ pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

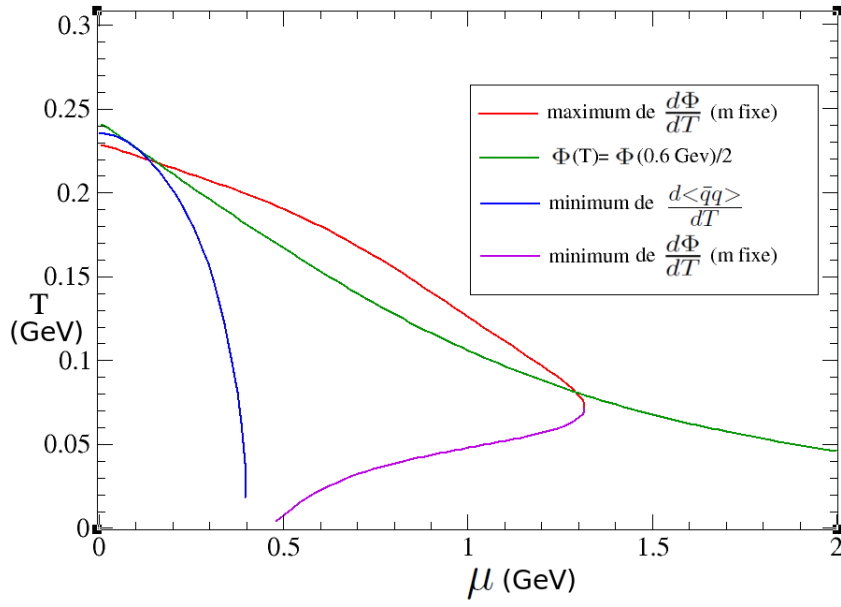


FIG. 7.23 – Diagramme de phase pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$. En rouge : le maximum de $\frac{d\Phi}{dT}$, en violet : le minimum de $\frac{d\Phi}{dT}$, en bleu : le minimum de $\frac{d\langle \bar{q}q \rangle}{dT}$ et en vert : la température pour laquelle $\Phi = \frac{\Phi(0,6 \text{ GeV})}{2}$.

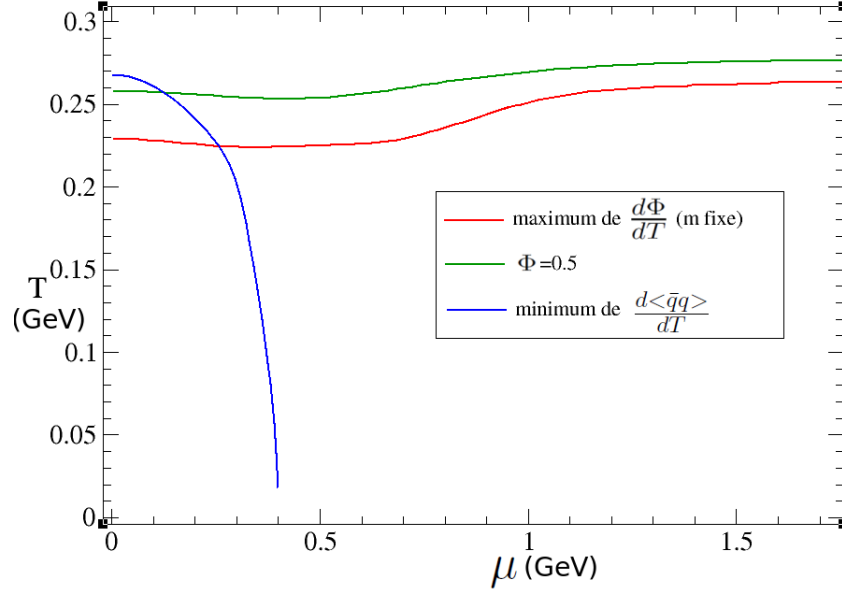


FIG. 7.24 – Diagramme de phase pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. En rouge : le maximum de $\frac{d\Phi}{dT}$, en bleu : le minimum de $\frac{d\langle \bar{q}q \rangle}{dT}$ et en vert : la température pour laquelle $\Phi = 0,5$.

Enfin, traçons figure 7.25, le diagramme de phase pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. De la même manière que pour le potentiel polynomial, les lignes de transition qui étaient quasiment horizontales pour $B = \Lambda$, se rapprochent de l'axe des abscisses lorsque le potentiel chimique augmente.

Nous avons ainsi construit le diagramme de phase température - potentiel chimique à partir des paramètres d'ordre du modèle PNJL. Or ce modèle permet de calculer directement des quantités mésoniques comme les fonctions spectrales et les masses des mésons. Nous verrons si ces quantités peuvent également nous renseigner sur l'allure de ce diagramme de phase.

7.3 Conclusion

On a ainsi évoqué la technique consistant à fixer m à m_0 et permettant de séparer les effets de la transition chirale de ceux liés à la transition de déconfinement. On a également pu tracer, grâce aux paramètres d'ordre $\langle \bar{q}q \rangle$ et Φ , différents diagrammes de phase associés à différents choix de caractéristiques du modèle (type de potentiel effectif, mécanisme de coupure des intégrales) en incluant l'étude du point critique et de la zone de métastabilité. On a alors pu conclure à l'existence d'une nouvelle phase confinée et à symétrie chirale restaurée appelée "phase CCS" et présente à haut potentiel chimique et basse température.

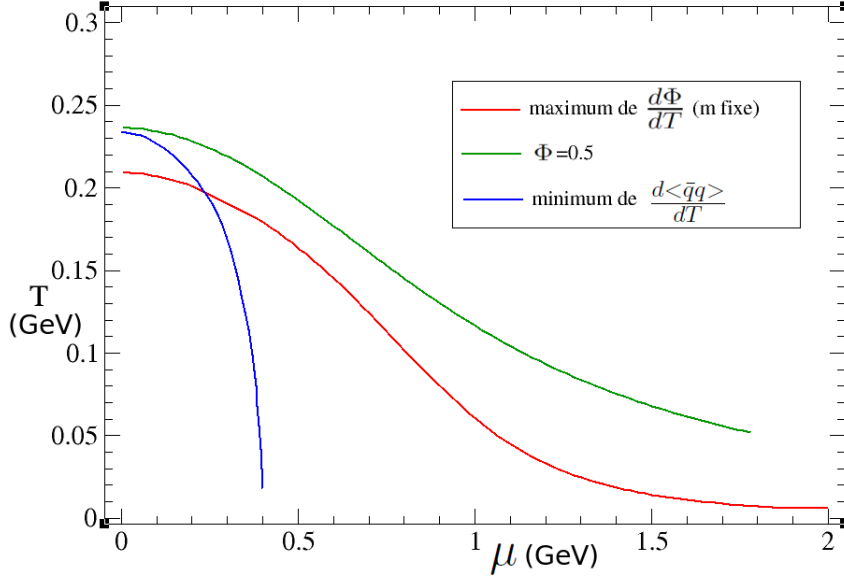


FIG. 7.25 – Diagramme de phase pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. En rouge : le maximum de $\frac{d\Phi}{dT}$, en bleu : le minimum de $\frac{d\langle \bar{q}q \rangle}{dT}$ et en vert : la température pour laquelle $\Phi = 0,5$.

Cette phase a déjà été observée dans de précédentes publications [65, 77, 78]. Ces études ont été effectuées dans un domaine en deçà de 500 MeV. Ici les calculs ont été poussés jusqu'à plus de 1500 MeV. Le modèle perd sûrement en cohérence à si haut potentiel chimique mais connaître les prévisions au delà des limites supposées permet d'en savoir plus sur la position de ces limites. De plus, nous avons effectué les calculs pour $B = +\infty$ et comparé à ceux pour $B = \Lambda$ déjà effectués dans les articles cités ci-dessus.

Chapitre 8

Tracé du diagramme de phase T- μ à l'aide des sondes mésoniques

On vient de voir que l'étude du diagramme de phase à l'aide des paramètres d'ordre associés aux transitions chirale et de déconfinement permettrait de mettre en évidence l'existence d'une troisième phase, en plus des phases hadroniques et de QGP : la phase CCS. Il s'agit désormais de sonder ce diagramme à l'aide de sondes mésoniques. Pour cela, on se penche sur l'étude des fonctions spectrales dans les canaux scalaire et pseudoscalaire. On définit alors un critère de déconfinement et un critère de transition chirale de manière purement mésonique. On verra alors que les résultats obtenus sont en accord avec l'étude en champ moyen réalisée dans le chapitre précédent.

8.1 Étude des fonctions spectrales

8.1.1 Tracé des fonctions spectrales du pion et du méson sigma

Comme dans le cadre du modèle NJL, on trace les fonctions spectrales des mésons σ et π en évaluant les polarisations scalaire et pseudo-scalaire respectivement. Et de la même manière que précédemment, on exprime les fonctions spectrales en fonction d'une intégrale de boucle qui, cette fois-ci, s'exprime en fonction de f_{Φ}^+ et de f_{Φ}^- :

$$I_2(\omega) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1 - f_{\Phi}^-(E_p) - f_{\Phi}^+(E_p)}{E_p(\omega^2 - 4E_p^2)}. \quad (8.1)$$

Précisons que le schéma de coupure des intégrales employé ($B = \Lambda$ ou $B \rightarrow +\infty$) ne s'applique qu'au calcul du grand potentiel et donc du tri-

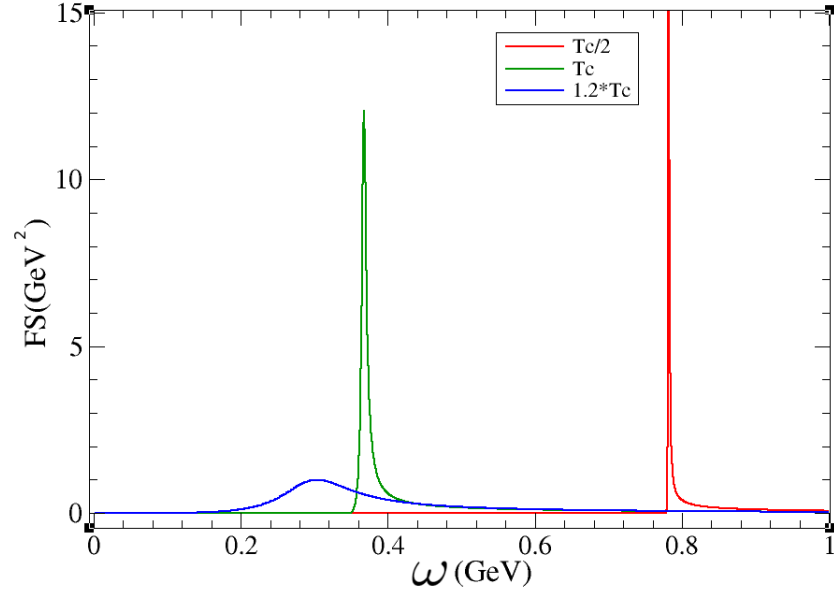


FIG. 8.1 – Fonction spectrale du mode scalaire associé au méson σ à $\mu = 0$ pour différentes températures. Ici $T_C = 273$ MeV.

plet $(m, \Phi, \bar{\Phi})$, pas au calcul des intégrales de boucles et donc pas à celui des polarisations. L'intégrale intervenant dans la formule 8.1 va donc bien de 0 à Λ dans tous les cas. Il est, en effet, logique d'exclure les quarks thermiques correspondant à des impulsions supérieures à Λ . Ces quarks, appartenant au régime de liberté asymptotique, ne peuvent intervenir dans la description d'une interaction créant des états liés ou quasi-liés.

Sur les figures 8.1 et 8.2 sont représentées les fonctions spectrales des mésons σ et π respectivement pour différentes températures caractéristiques des différents comportements de ces fonctions. À basse température, la fonction spectrale est très piquée, voire sous la forme d'un pic de Dirac dans le cas du pion. Lorsque la température augmente, le pic perd en hauteur et s'élargit jusqu'à s'étaler complètement sur l'axe des fréquences à haute température.

8.1.2 Interprétation de l'élargissement des fonctions spectrales

Une première interprétation purement classique et statistique de l'élargissement avec la température peut être donnée. Prenons, pour cela, l'exemple du pion. Si la température est très faible, le bain thermique n'influe pas sur la propagation du pion qui est initialement un état lié : il n'y a pas d'événements intermédiaires entre l'émission et la réception du méson. Celui-ci se comporte alors comme une particule avec une masse bien définie, d'où

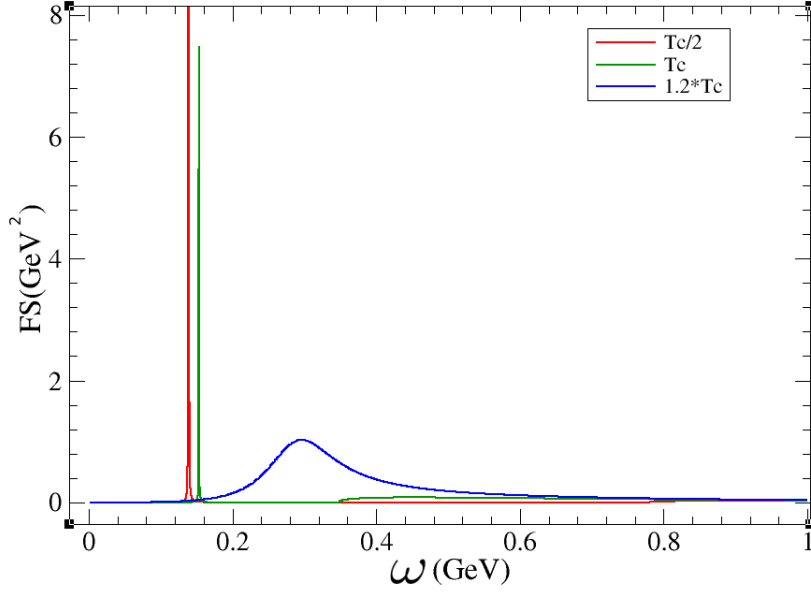


FIG. 8.2 – Fonction spectrale du mode pseudoscalaire associé au pion à $\mu = 0$ pour différentes températures. Ici $T_C = 273 \text{ MeV}$.

la fonction spectrale sous la forme d'un pic de Dirac : l'énergie de centre de masse reconstruite lors de la réception est l'énergie égale à la masse du pion. Lorsque la température augmente, les interactions du pion avec le bain thermique sont, cette fois, plus probables : il y a des événements intermédiaires entre l'émission et la réception du pion. Ces événements vont augmenter ou diminuer l'énergie reconstruite de la particule, ce qui va entraîner l'étalement de la fonction spectrale. Cet étalement est, selon cette interprétation, uniquement dû aux collisions du méson avec les particules du bain thermique qui induisent un écrantage de l'interaction nue.

Une autre interprétation, quantique cette fois, est possible. La fonction spectrale correspond à la corrélation à deux quarks. Sans bain thermique, ce sont effectivement ces interactions qui dominent. Les quarks sont confinés au sein des mésons et n'interagissent que deux à deux. En présence du plasma de quarks et de gluons, les interactions à grand nombre de quarks deviennent dominantes. La corrélation de deux quarks par le vertex $i\gamma_5 \vec{\tau}$, c'est-à-dire associée au pion, s'affaiblit et ne rend plus compte de la propagation d'un pion dans le vide mais d'un mode pionique se propageant dans le plasma, ce qui entraîne l'élargissement. La fonction spectrale élargie est donc caractéristique d'un mode décorrélé et est donc associée à un milieu déconfiné.

Penchons-nous désormais sur l'évolution de la masse des mésons.

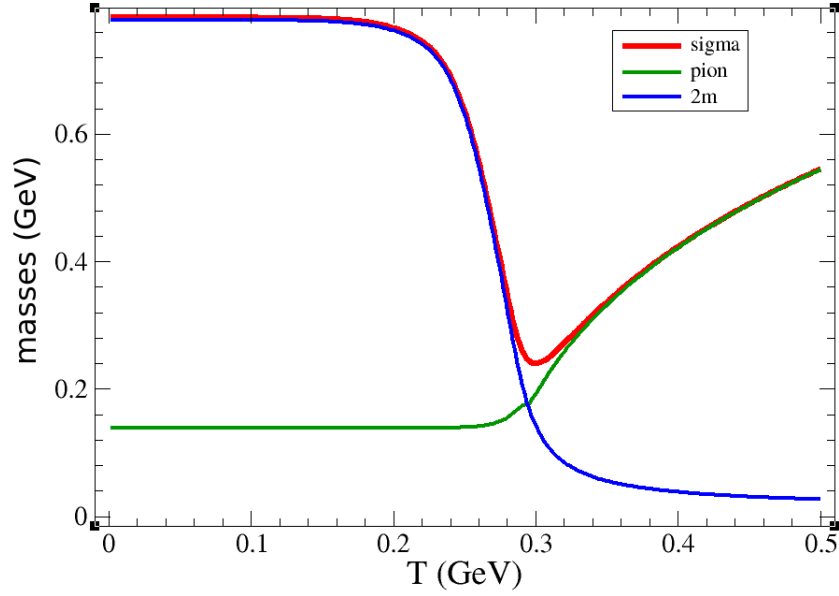


FIG. 8.3 – Masses des mésons à $\mu = 0$ GeV

8.1.3 La masse des mésons

Pour déterminer la masse des mésons, on procède de la même manière que dans le modèle NJL à température non-nulle. Sur les figures 8.3 et 8.4, on trace les masses du pion et du sigma ainsi que $2m$ en fonction de la température à $\mu = 0$ et $\mu = 0,37$ GeV respectivement. Comme dans le modèle NJL, la masse du sigma est d'abord légèrement supérieure à $2m$ puis rejoint la masse du pion, signe de restauration chirale. À plus haut potentiel chimique, la discontinuité due à la transition chirale de premier ordre se répercute sur la masse des mésons qui subit également une discontinuité.

Explorons ensuite les différentes phases du diagramme en nous plaçant à haut potentiel chimique.

8.1.4 Étude des fonctions spectrales à haut potentiel chimique dans le modèle PNJL

Plaçons-nous à un potentiel chimique nul et traçons les fonctions spectrales du sigma et du pion en faisant monter la température : voir figures 8.5, 8.6 et 8.7.

On constate qu'à $T = 50$ MeV, figure 8.5, les fonctions spectrales sont piquées : les mésons sont dans des états liés (π) ou quasi-liés (σ) : les quarks sont donc encore confinés dans les hadrons (ici les mésons). Plus rigoureusement, le modèle PNJL n'étant pas réellement confinant, on interprète ces états liés ou quasi-liés comme étant un indice que la QCD entraîne un confi-

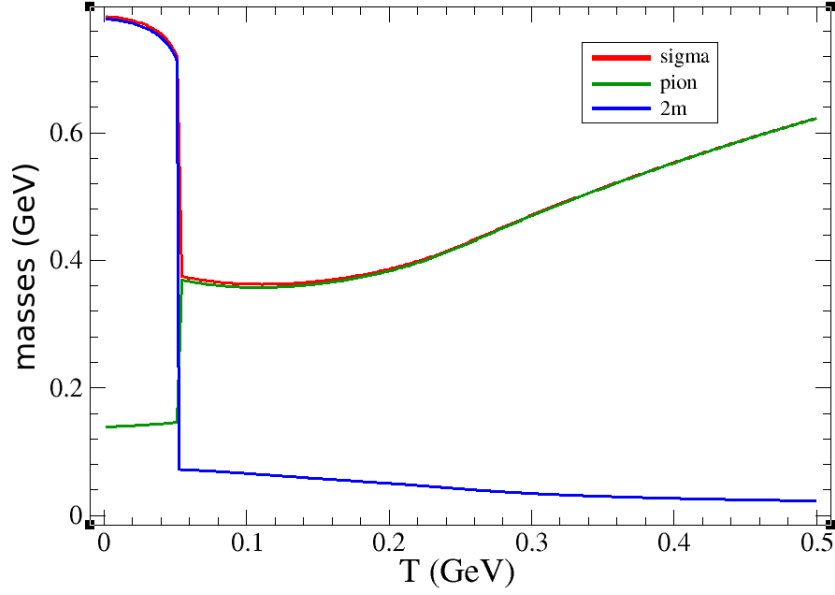


FIG. 8.4 – Masses des mésons à $\mu = 0.39$ GeV

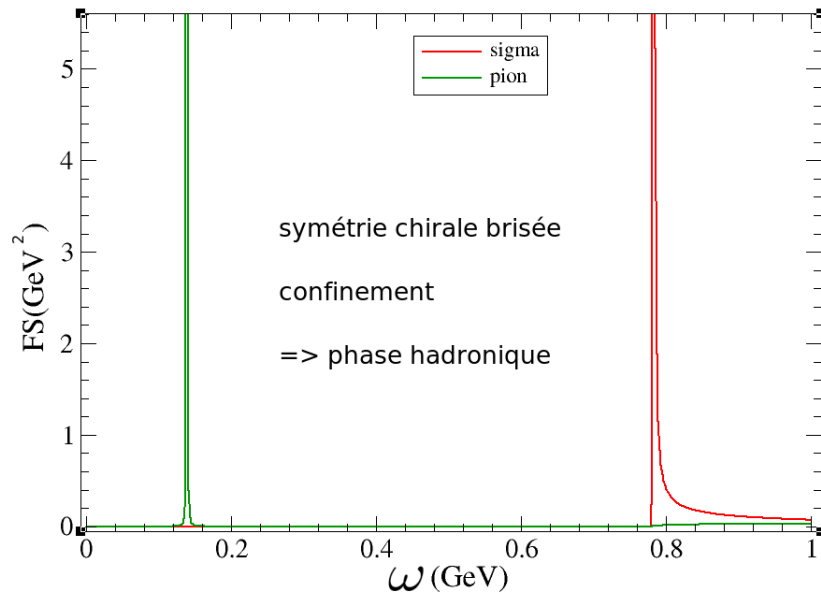


FIG. 8.5 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 0$ et $T = 50$ MeV.

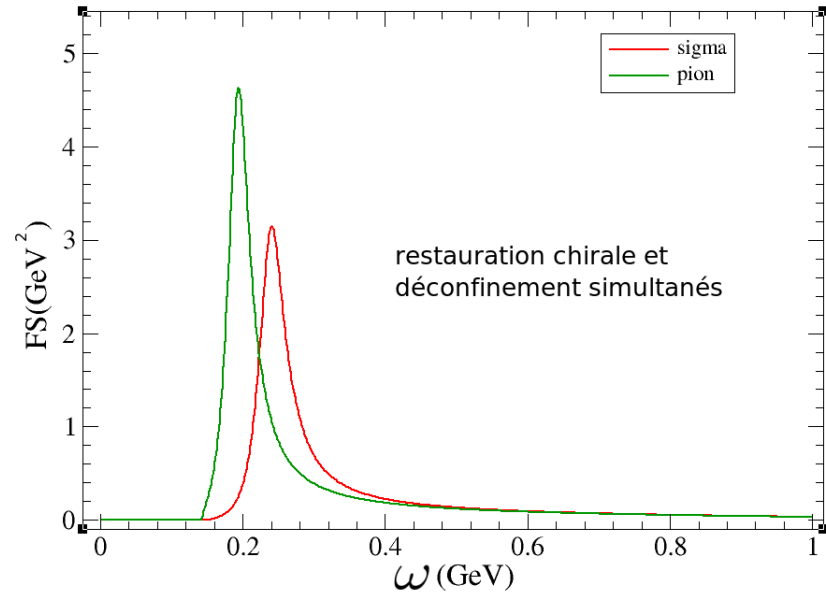


FIG. 8.6 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 0$ et $T = 300$ MeV.

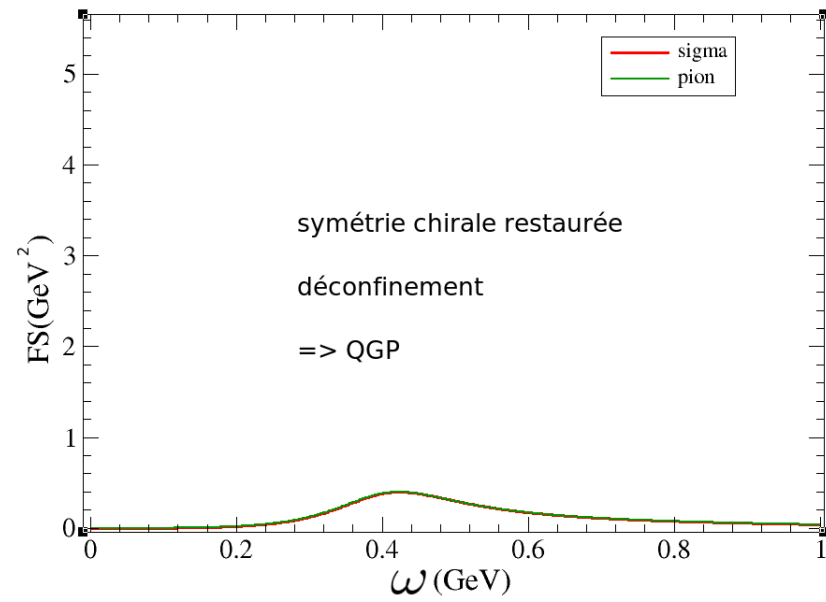


FIG. 8.7 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 0$ et $T = 400$ MeV.

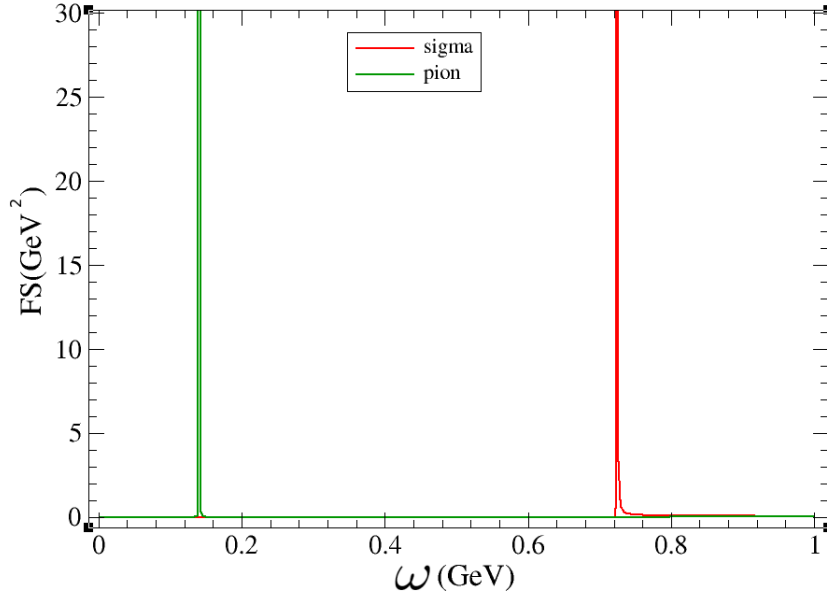


FIG. 8.8 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 390$ MeV et $T = 50$ MeV.

nement réel à cette température. De plus, les pics apparaissent à des énergies différentes : les masses des partenaires chiraux que sont le pion et le sigma sont différentes, la symétrie chirale est donc brisée. Les conditions sont donc celles de la phase hadronique : symétrie chirale brisée et confinement. Puis à $T = 300$ MeV, figure 8.6, on voit les fonctions spectrales se rapprocher, signe de la restauration chirale et s'aplatir, signe du déconfinement. Enfin à $T = 400$ MeV, figure 8.7, les fonctions spectrales sont très étalées sur l'axe des énergies et de hauteur très faible, signe d'un état avancé de déconfinement. Les conditions sont celles du plasma de quarks et de gluons. À potentiel chimique nul, les deux transitions sont donc traversées en même temps.

Plaçons-nous ensuite à un potentiel chimique de 370 MeV et traçons les fonctions spectrales du sigma et du pion en faisant monter la température : voir figures 8.8, 8.9, 8.10 et 8.11.

On constate qu'à $T = 50$ MeV, figure 8.8, les conditions sont également celles de la phase hadronique : symétrie chirale brisée et confinement. À $T = 55$ MeV, figure 8.9, les fonctions sont toujours piquées mais se confondent de manière quasiment exacte. On a donc $m_\pi = m_\sigma$. La symétrie chirale est donc restaurée tandis que le confinement est toujours à l'oeuvre. Les conditions sont, cette fois-ci, celles de la phase "confined and chiral symmetric" (CCS). Puis, à $T = 120$ MeV, figure 8.10, les fonctions spectrales commencent à s'élargir : le déconfinement se fait sentir tandis que la symétrie chirale reste

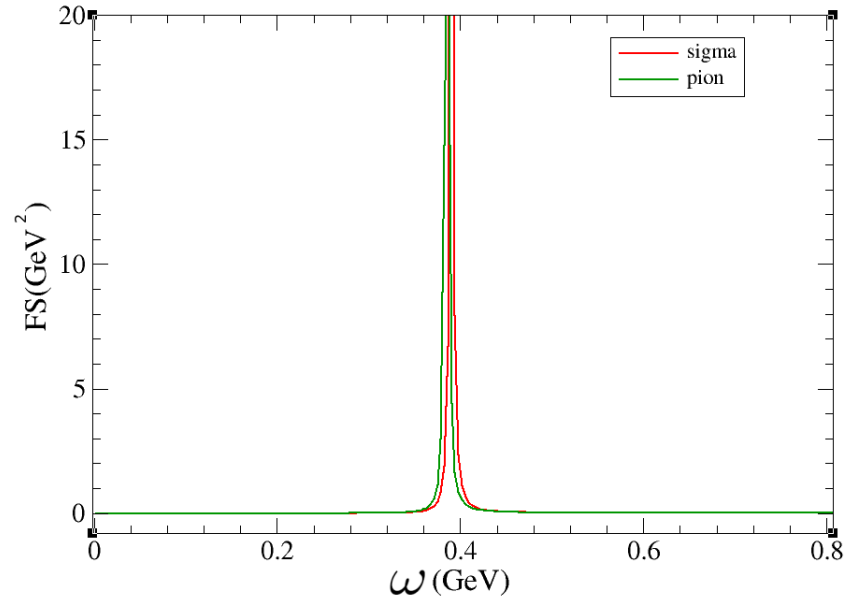


FIG. 8.9 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 390$ MeV et $T = 55$ MeV.

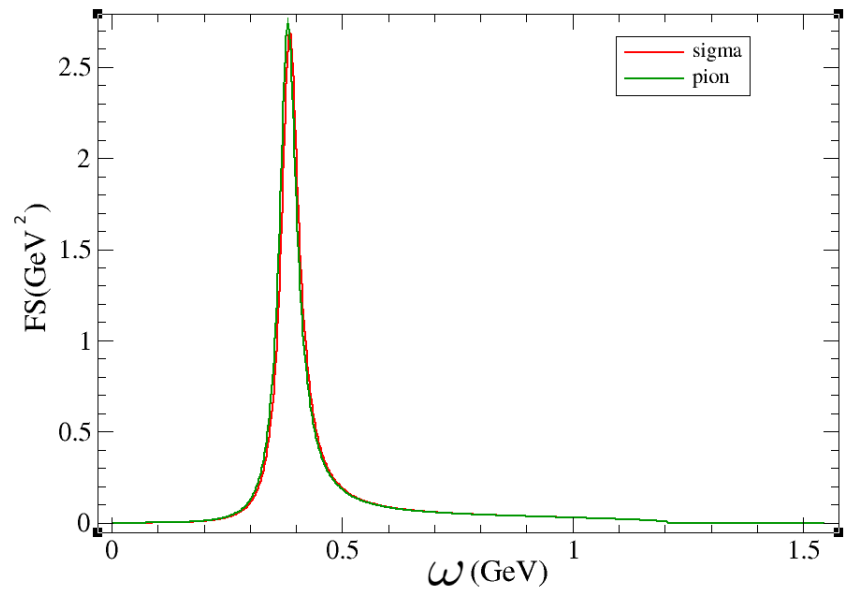


FIG. 8.10 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 390$ MeV et $T = 120$ MeV.

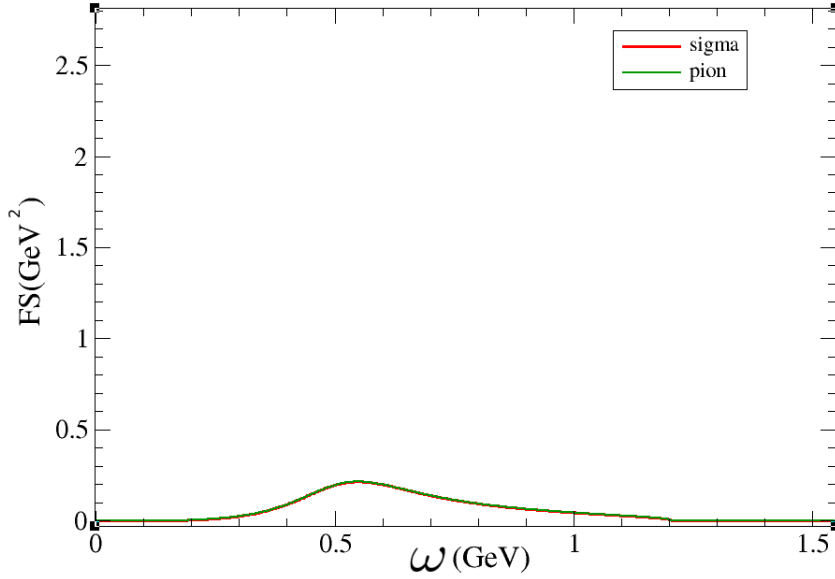


FIG. 8.11 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $\mu = 390$ MeV et $T = 400$ MeV.

respectée. Enfin, à $T = 400$ MeV, figure 8.11, les fonctions spectrales sont très étalées sur l'axe des énergies et de hauteur très faible, signe encore une fois, d'un état avancé de déconfinement. Les conditions sont celles du plasma de quarks et de gluons. Les différentes configurations sont résumées sur la figure 8.12 où l'on a reproduit le diagramme de phase tracé précédemment figure 7.16.

De manière analogue à l'utilisation du condensat et de la boucle de Polyakov comme paramètres d'ordre, on étudie la variation de différentes quantités liées aux masses et aux fonctions spectrales des mésons afin de trouver des critères de transition chirale et de déconfinement pertinents liés aux quantités mésoniques.

8.2 Choix des critères de transition

Notre but est donc d'explorer le diagramme de phase avec des sondes mésoniques. On prendra comme critère mésonique pour la transition chirale la différence entre les masses des partenaires chiraux : $m_\pi - m_\sigma$ (qu'on normalisera à la valeur à $T = 0$ et $\mu = 0$). Cette différence est grande si la symétrie est brisée et quasi-nulle si la symétrie est restaurée. La difficulté est alors d'introduire un critère lié au déconfinement alors qu'il n'existe pas de véritable confinement dans le modèle utilisé.

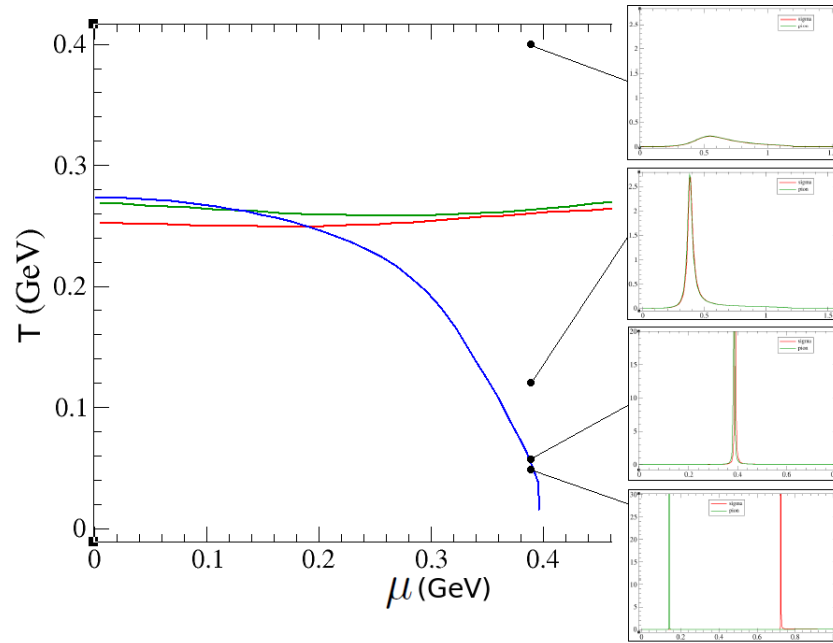


FIG. 8.12 – Évolutions des fonctions spectrales pour $\mu = 390$ MeV à différentes températures. On a représenté en arrière-plan le diagramme de phase obtenu en champ moyen. Les deux encarts inférieurs correspondent à des températures situées juste avant et juste après la transition chirale.

8.2.1 La largeur de la fonction spectrale

Pour la transition de déconfinement, plusieurs critères ont été envisagés. Le premier consiste à approximer la fonction spectrale à une lorentzienne (approximation des quasi-particules) et à prendre comme critère la largeur de la lorentzienne. Pour cela, on réécrit la fonction spectrale de la manière suivante :

$$FS(\omega) = Im \left(\frac{\Pi(\omega)}{1 - 2G\Pi(\omega)} \right) = Im \left(\frac{\Pi(\omega)[1 - 2GRe(\Pi(\omega))] - i\Pi(\omega)[-2GIm(\Pi(\omega))]}{[1 - 2GRe(\Pi(\omega))]^2 + [2GIm(\Pi(\omega))]^2} \right) \quad (8.2)$$

i-e

$$FS(\omega) = \frac{Im(\Pi(\omega))}{[1 - 2GRe(\Pi(\omega))]^2 + [2GIm(\Pi(\omega))]^2}. \quad (8.3)$$

On effectue ensuite le développement suivant :

$$1 - 2GRe(\Pi(\omega)) \approx (1 - 2GRe(\Pi(\omega)))|_{\omega=m_\pi} + (\omega^2 - m_\pi^2)(-2G) \frac{\partial Re(\Pi(\omega))}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=m_\pi}. \quad (8.4)$$

Le premier terme s'annule si l'on fait l'approximation $Im(\Pi)|_{\omega=m_\pi} = 0$ car dans ce cas, m_π est un pôle de $1 - 2GRe(\Pi(\omega))$. On peut alors mettre l'expression de la fonction spectrale sous la forme d'une lorentzienne :

$$FS(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - m_\pi)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \times \frac{\Pi(\omega)}{4G^2 \frac{\partial Re(\Pi(\omega))}{\partial \omega}} \quad (8.5)$$

avec

$$\Gamma = \frac{2Im(\pi)}{\frac{\partial Re(\Pi(\omega))}{\partial \omega} \Big|_{\omega=m_\pi}}. \quad (8.6)$$

Remarquons que ce calcul est valable à la fois pour le pion et pour le sigma. Par la suite, pour éviter le problème numérique posé par la discontinuité des quantités calculées à la température de Mott (température du seuil de désintégration *i.e.* pour laquelle $m_\pi = 2m$), on se restreindra au cas du méson σ , les conclusions pour le pion étant qualitativement les mêmes mais plus compliquées à obtenir.

Deux autres largeurs associées à la fonction spectrales ont été considérées : la largeur à mi-hauteur et la largeur séparant les points d'inflexion de part et d'autre de la quasi-lorentzienne. On représente l'évolution de ces trois largeurs en fonction de la température à $\mu = 0,3$ GeV sur la figure 8.13.

On constate qu'à haute température la courbe de la largeur calculée dans l'approximation lorentzienne décroche des deux autres courbes. Cela est dû au fait que l'approximation $Im(\Pi)|_{\omega=m_\pi} = 0$ n'est valable qu'à basse température. L'étude de la largeur peut ainsi constituer un moyen de distinguer les différentes phases. Un point de vue intéressant pour cela consiste à se placer dans le plan "largeur de la fonction spectrale" - "masse du méson".

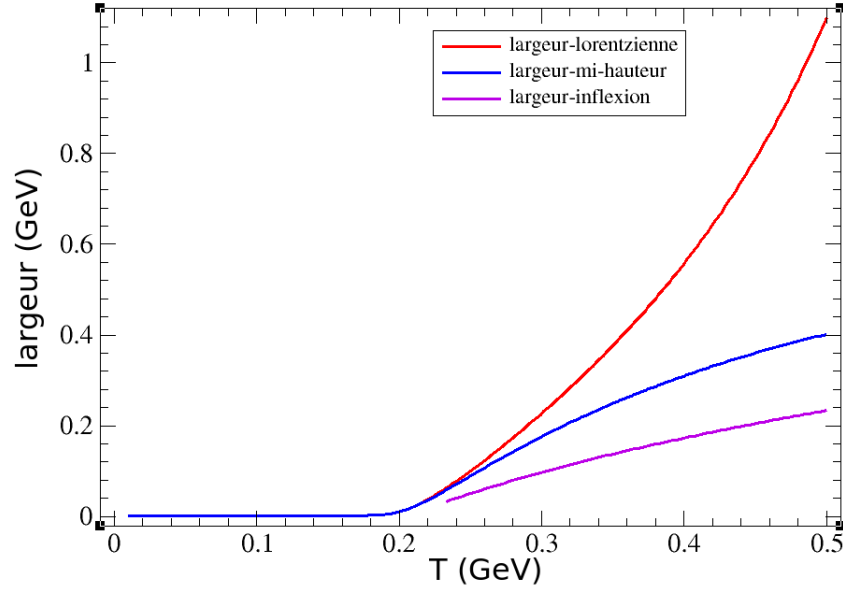


FIG. 8.13 – Largeurs dans l’approximation lorentzienne, à mi-hauteur et entre les points d’inflexion en fonction de T à $\mu = 0,3$ GeV.

8.2.2 Trajectoire dans le plan largeur-mi-hauteur - masse

Sur la figure 8.14, on trace différentes trajectoires dans ce plan pour μ fixé avec la température comme paramètre. On constate que pour $\mu = 0$; $\mu = 0,3$ GeV ; $\mu = 0,35$ GeV et $\mu = 0,4$ GeV à basse température (la partie basse et horizontale de la courbe), la largeur reste à peu près constante tandis que la masse du sigma diminue : cela caractérise la phase hadronique : confinée à symétrie chirale brisée. À haute température, la masse du sigma ainsi que la largeur de la fonction spectrale augmentent et on constate que la même trajectoire est suivie pour différents potentiels chimiques. Cette branche est caractéristique du domaine du plasma de quarks et de gluons. Enfin, à $\mu = 0,5$ GeV et $\mu = 0,6$ GeV, cette branche n’est atteinte que tardivement et la trajectoire suivie avant de l’atteindre est très différente des trajectoires associées aux autres potentiels chimiques, signe de l’exploration d’une autre phase. Nous interprétons le point séparant les deux branches de la trajectoire comme point de dissolution. Il correspond à la dissolution du méson dans le plasma pour ne devenir qu’une résonance de temps de vie très court puis un simple mode mésonique associé à la propagation de deux quarks très peu corrélés. En effet, comme on l’a vu précédemment, lorsque la largeur se met à augmenter, on ne peut plus considérer que le méson est dans un état quasi-lié.

D’autres critères ont été envisagés, comme le kurtosis [79] ou le rapport hauteur sur largeur. Nous les avons toutefois rejeté car, bien que présentant

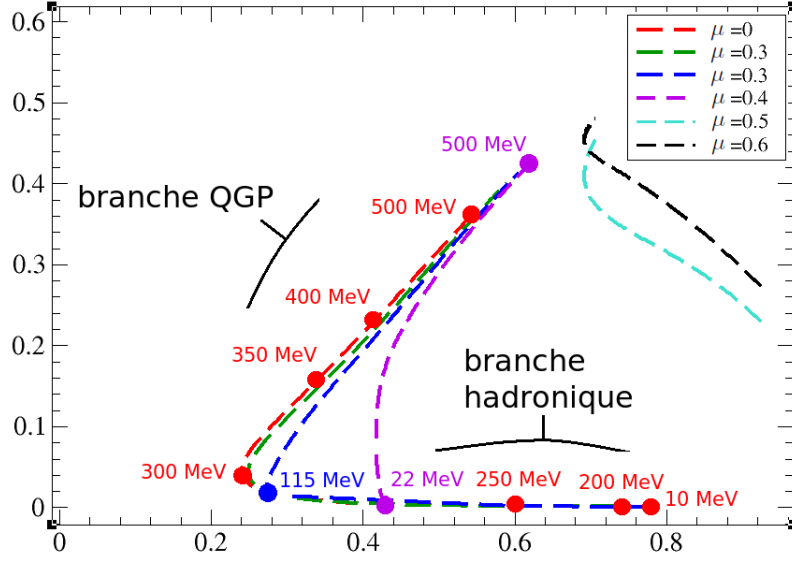


FIG. 8.14 – Trajectoire dans le plan largeur-masse pour le méson σ pour μ fixé avec la température comme paramètre

des paliers intéressants pour séparer les deux phases, ils évoluaient de manière non-monotone. Celui qui a été retenu fut l'écart-type de la fonction spectrale [80, 81].

8.2.3 L'écart-type comme critère de déconfinement

Son expression est la suivante :

$$Ec = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2} \quad (8.7)$$

avec $\langle \omega \rangle = \frac{\int FS(\omega)\omega d\omega}{\int FS(\omega)d\omega}$ et $\langle \omega^2 \rangle = \frac{\int FS(\omega)\omega^2 d\omega}{\int FS(\omega)d\omega}$, $FS(\omega)$ représentant la fonction spectrale du sigma. Nous choisissons ce critère car il présente l'avantage de saturer à deux plateaux différents dans la phase hadronique et dans la phase de plasma comme représenté figure 8.15. La présence de deux plateaux distincts vient du fait qu'à basse température, les fonctions spectrales varient peu, l'écart-type est alors constant et qu'à haute température, la largeur augmente avec la température mais le phénomène est compensé par l'affaïssement de la fonction spectrale, permettant à l'écart-type de la fonction de rester constant. On remarque que lorsque μ augmente, l'intervalle de température entre les deux plateaux s'élargit : la transition se fait plus lentement. L'écart-type (ou variance) de la fonction spectrale rend ainsi compte de l'élargissement de celle-ci : sa valeur est basse dans la phase hadronique et haute dans le plasma. Le fait qu'il sature à deux valeurs distinctes

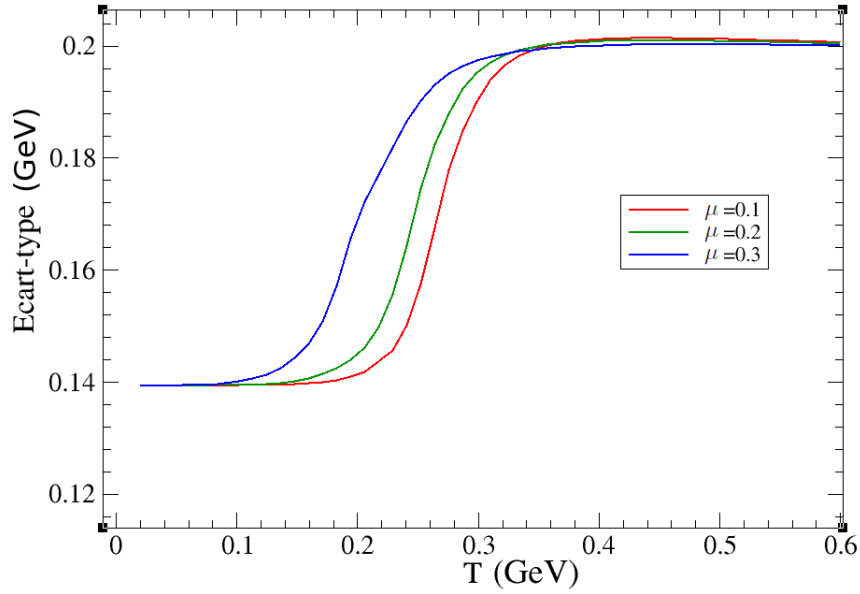


FIG. 8.15 – Écart-type en fonction de T pour $\mu = 0,1$ GeV, $\mu = 0,2$ GeV et $\mu = 0,3$ GeV

dans chaque phase en fait un critère de choix pour l'étude du déconfinement.

Un moyen d'illustrer efficacement la phase CCS, avant de passer au diagramme de phase complet, est de se placer sur une trajectoire en diagonale dans le diagramme de phase.

8.2.4 Trajectoire diagonale

On trace l'évolution des critères précédents sur la trajectoire en diagonale $\mu = 0,3 + 0,5T$ figure 8.16. On trace sur la figure 8.17 les évolutions des deux critères mésoniques : différence de masse des partenaires chiraux m_π et m_σ pour le critère chirale et écart-type pour le critère de déconfinement.

À basse température, les partenaires chiraux ont des masses différentes signe d'une brisure de la symétrie chirale. L'écart-type est faible, signe d'une fonction spectrale piquée et donc du confinement. La figure 8.8 donne la forme typique de la fonction spectrale dans ce cas. On retrouve ainsi les caractéristiques de la phase hadronique. Pour T compris entre 0,1 GeV et 0,2 GeV et donc $\mu \in [0,35; 0,4]$, les masses du pion et du sigma se confondent tandis que l'écart-type augmente relativement lentement. La phase est donc encore confinée mais à symétrie chirale restaurée, il s'agit de la phase CCS. La figure 8.9 donne la forme typique de la fonction spectrale dans ce cas-ci. Enfin, à haute température et haut potentiel chimique, l'écart-type prend une grande valeur, signe d'un étalement de la fonction spectrale et donc du

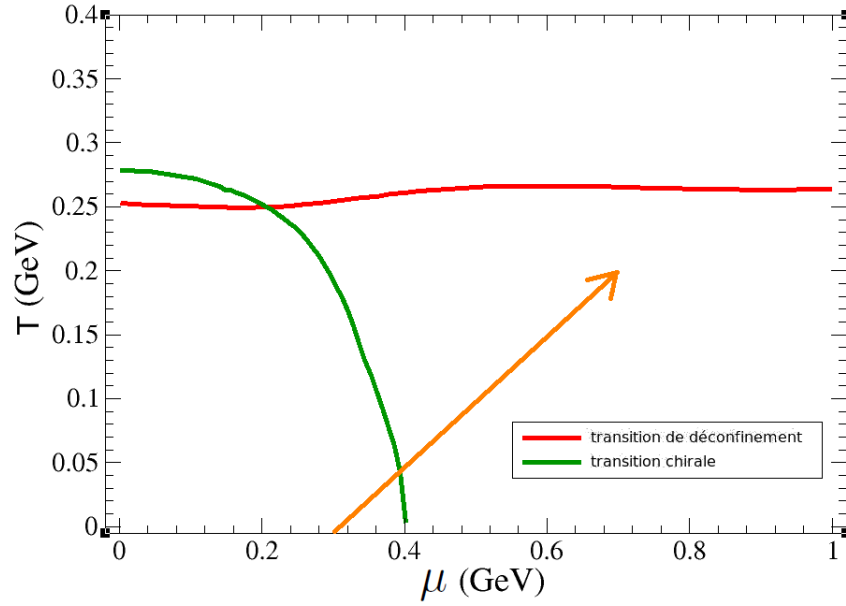


FIG. 8.16 – Trajectoire $\mu = 0, 3 + 0, 5T$ en orange superposée au diagramme de phase en champ moyen pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$.

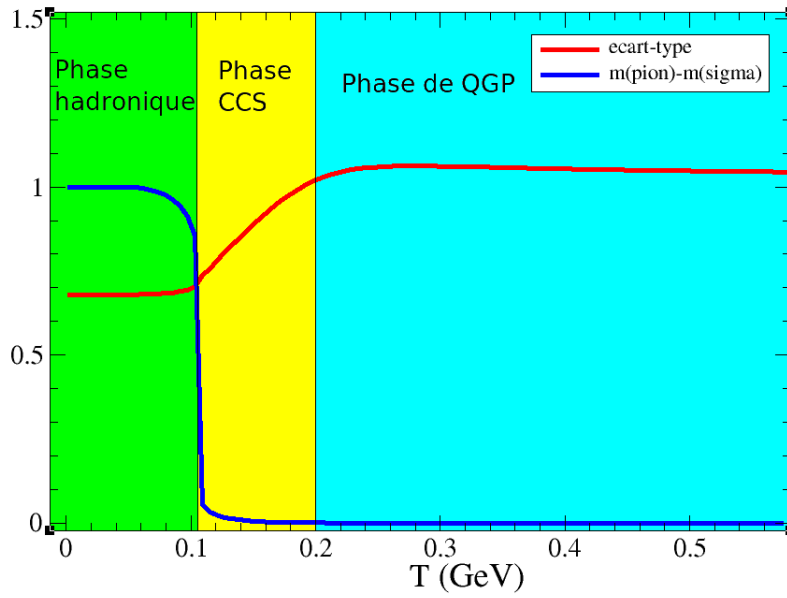


FIG. 8.17 – Écart-type et $m_\pi - m_\sigma$ normalisé sur la trajectoire $\mu = 0, 3 + 0, 5T$.

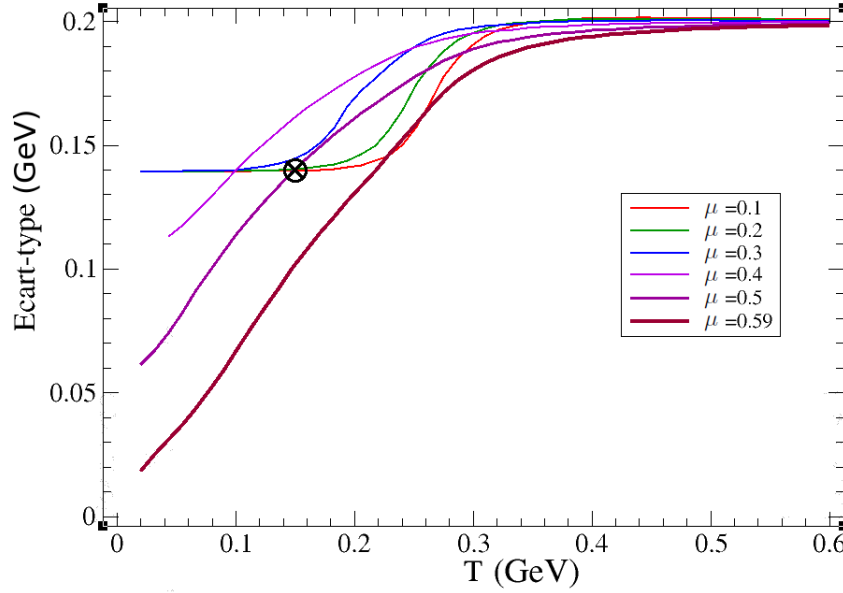


FIG. 8.18 – Écart-type pour différents potentiels chimiques. La croix indique le cas étudié figure 8.19

déconfinement. La dernière phase explorée est celle du plasma de quarks et de gluons.

On a donc à notre disposition un critère de choix pour l'étude du déconfinement en l'objet de l'écart-type. Déterminons précisément comment sont choisies, à partir de l'écart-type, les températures qui nous serviront à caractériser le début et le fin de la transition de déconfinement.

8.2.5 Critères de début et de fin de la transition de déconfinement

À haut potentiel chimique, le premier plateau correspondant à la phase hadronique n'existe plus : l'écart-type présente une dérivée non nulle dès $T = 0$. On le constate sur la figure 8.18. À haut potentiel chimique, la phase CCS est donc présente dès les basses températures. En effet, ce n'est pas la valeur absolue de l'écart-type qui indique la phase en présence mais sa valeur relative aux valeurs extrémales : si l'écart-type est proche de la valeur minimale, on considère que le confinement agit et s'il est proche de la valeur maximale, on considère que la phase est déconfinée.

En observant les fonctions spectrales du méson σ à différents potentiels chimiques et différentes températures, on constate, en effet, qu'elles sont comparables quand la valeur relative et non absolue de l'écart-type atteint la même valeur. Par exemple, sur la figure 8.18, les courbes pour $\mu = 0,1$ GeV et pour $\mu = 0,5$ GeV se croisent à $T = 0,15$ GeV (le point d'intersection est indiqué par une croix), l'écart-type a donc la même valeur. Pourtant les

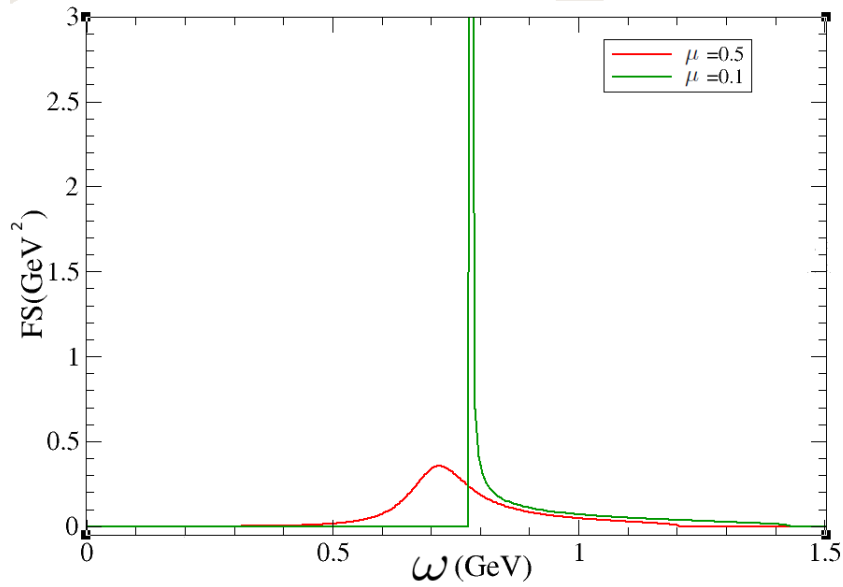


FIG. 8.19 – Comparaison des fonctions spectrales du sigma à $T = 0, 15$ GeV pour $\mu = 0, 1$ GeV et $\mu = 0, 5$ GeV.

fonctions spectrales sont très différentes comme on peut le constater sur la figure 8.19. À $\mu = 0, 1$ GeV, l'écart-type est très proche de sa valeur minimale et la fonction spectrale est très piquée : le domaine exploré est donc la phase hadronique. À $\mu = 0, 5$ GeV, l'écart-type est déjà très éloigné de sa valeur minimale, la fonction spectrale a commencé à s'étaler : on a quitté la phase hadronique et l'on se trouve vers la fin de la phase CCS donc proche du déconfinement. C'est donc bien la valeur relative et non absolue de l'écart-type qui indique la phase concernée.

On utilisera comme critère de début de transition de déconfinement l'inégalité suivante :

$$EC > EC_{min} + 2\%(EC_{max} - EC_{min}), \quad (8.8)$$

avec EC l'écart-type. Si l'inégalité est respectée, le déconfinement commence à se faire sentir, sinon on est encore dans la phase hadronique, voir le code utilisé en Annexe B. Le critère de fin de transition est quant à lui :

$$EC > EC_{max} - 2\%(EC_{max} - EC_{min}). \quad (8.9)$$

Si l'inégalité est respectée, on est passé dans la phase du plasma, sinon on est encore dans la phase CCS si la symétrie chirale est restaurée ou encore dans la zone de transition si la symétrie chirale est brisée.

On peut désormais tracer les diagrammes de phase à partir des critères mésoniques.

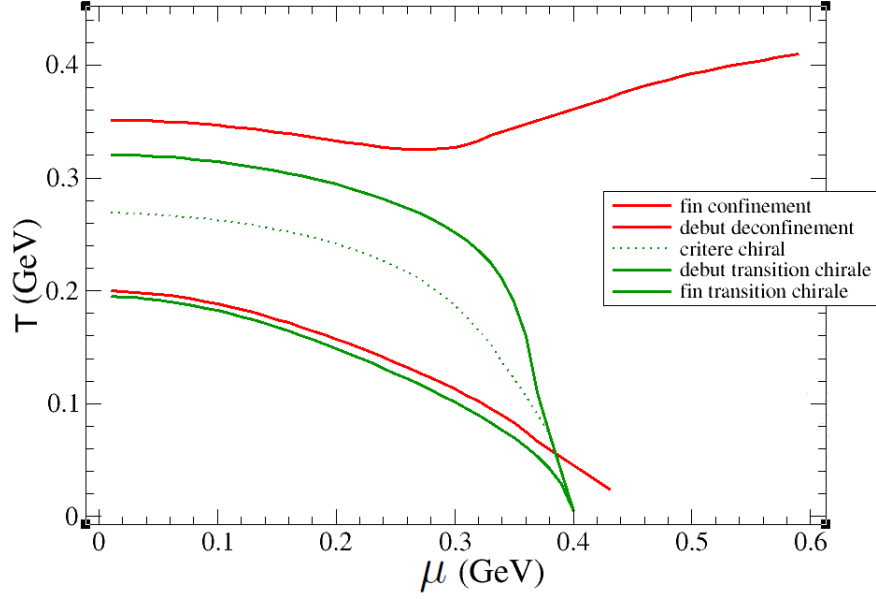


FIG. 8.20 – Diagramme de phase mésonique pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$.

8.3 Les diagrammes de phase tracé à partir des critères mésoniques

8.3.1 Diagramme de phase mésonique pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

On utilise le même genre de critère pour délimiter la zone de transition chirale. Soit CC le critère chiral : $CC = m_\sigma - m_\pi$, le début de la zone de transition chirale intervient lorsque :

$$CC = CC_{min} + 2\%(CC_{max} - CC_{min}) \quad (8.10)$$

et la fin de cette zone lorsque

$$CC > CC_{max} - 2\%(CC_{max} - CC_{min}). \quad (8.11)$$

À ceci, on ajoute la ligne médiane de transition chirale prise lorsque

$$CC = \frac{CC_{min} + CC_{max}}{2}. \quad (8.12)$$

On trace ainsi le diagramme de phase représenté figure 8.20. À bas potentiel chimique, on observe la présence de trois zones : à basse température : la phase hadronique où les masses des partenaires chiraux sont différentes et où l'écart-type est faible car les fonctions spectrales sont piquées ; une zone intermédiaire où les transitions chirale et de déconfinement se produisent plus

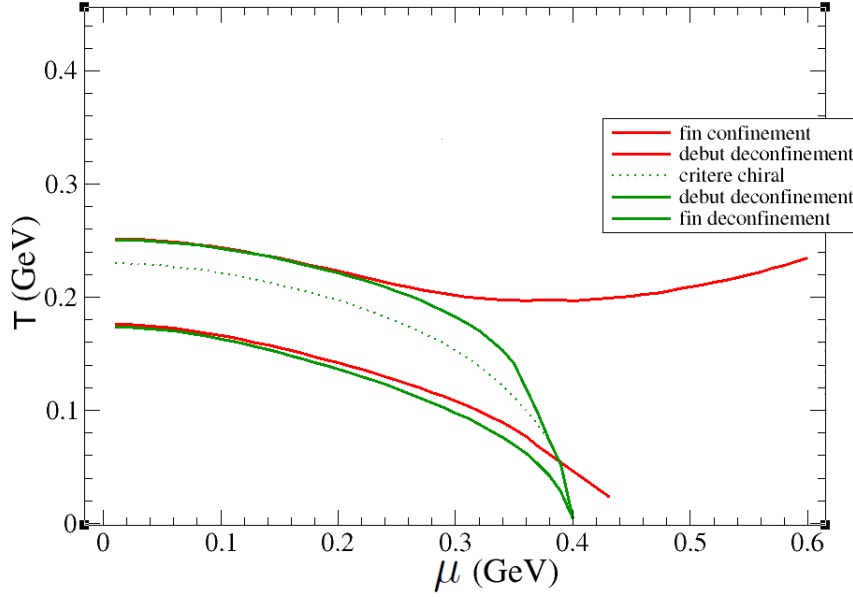


FIG. 8.21 – Diagramme de phase mésonique pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$.

ou moins simultanément et enfin, à haute température, la phase de plasma où les partenaires chiraux ont la même masse et où les fonctions spectrales sont étalées d'où une valeur élevée de l'écart-type. À haut potentiel chimique, la symétrie chirale est restaurée, on est donc en présence de la phase CCS à basse température et de la phase de plasma à haute température.

8.3.2 Diagramme de phase mésonique pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$

On trace sur la figure 8.21 le diagramme de phase dans le cas où $B = +\infty$. On constate le même genre de diagramme avec des lignes des transition apparaissant à plus basse température que dans le cas où $B = \Lambda$. On remarque que, dans ce cas, les lignes de transition chirale et de déconfinement coïncident à $\mu = 0$.

8.3.3 Diagrammes de phase mésonique pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$

On trace sur les figures 8.22 et 8.23, les diagrammes de phase pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. On constate des transitions légèrement plus rapide et quelques différences de comportement pour la séparation entre phase CCS et plasma à haut μ . On remarque que, de la même manière que pour $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{poly}$, lorsque $B = +\infty$, les lignes de transition chirale et de déconfinement coïncident à $\mu = 0$.

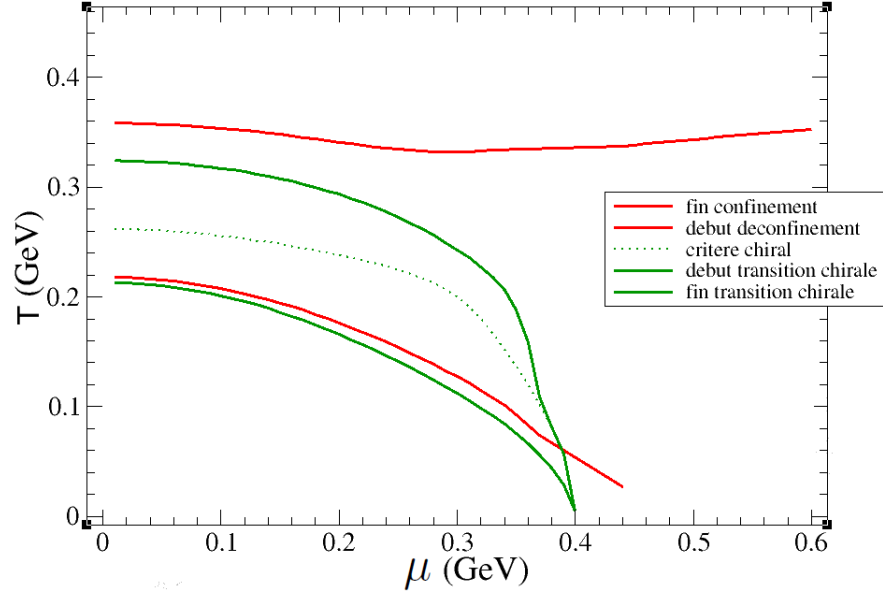


FIG. 8.22 – Diagramme de phase mésonique pour $B = \Lambda$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$.

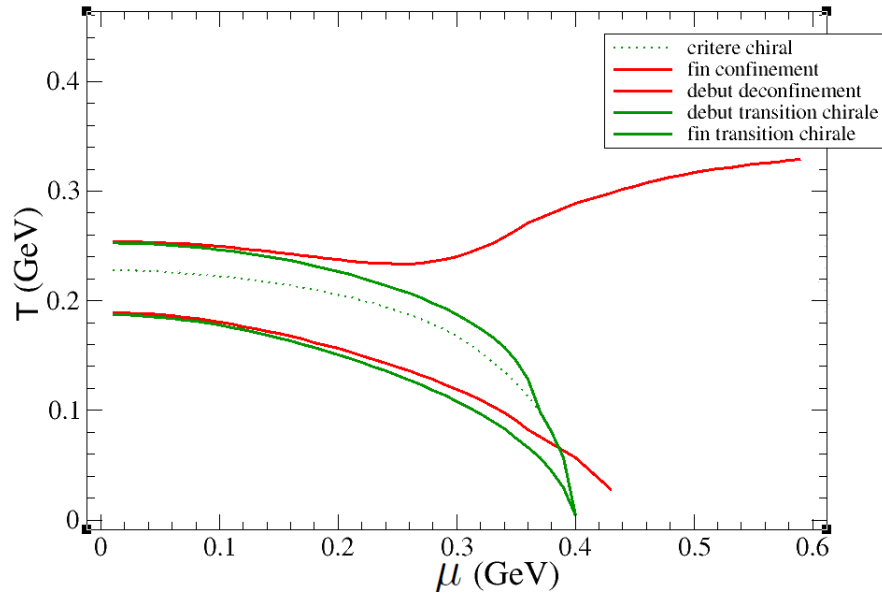


FIG. 8.23 – Diagramme de phase mésonique pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$.

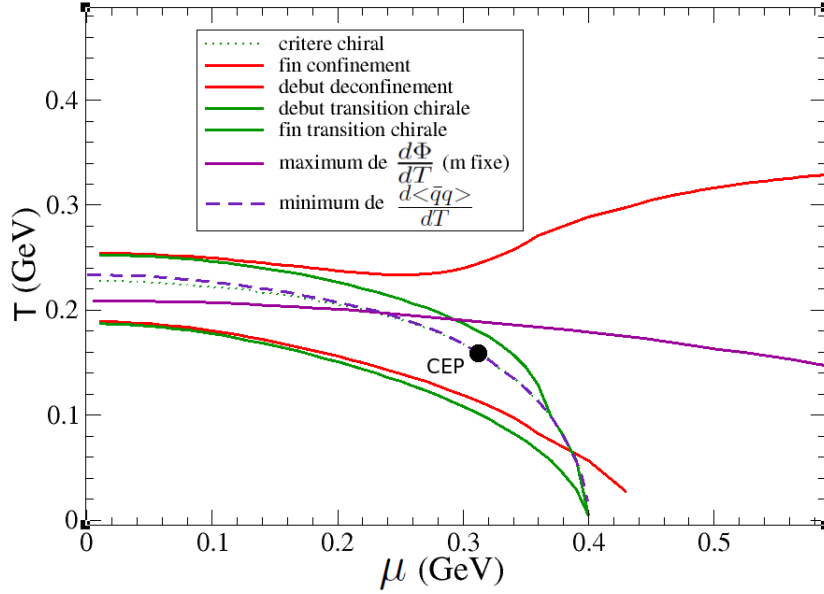


FIG. 8.24 – Diagrammes de phase mésonique et en champ moyen pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$.

8.3.4 Superposition des diagrammes de champ moyen et de quantités mésoniques

Sur la figure 8.24, on superpose les diagrammes de phase obtenus à l'aide des paramètres d'ordre en champ moyen (en violet) et ceux obtenus à l'aide des quantités mésoniques ici pour $B = +\infty$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{log}$. On constate que les lignes de transition chirale se confondent et que la ligne de transition de déconfinement tracée à l'aide de Φ s'insère plus ou moins au milieu des lignes de début et de fin de déconfinement tracées à l'aide de l'écart-type. Ainsi, on a un bon accord entre le confinement purement statistique induit par le paramètre d'ordre Φ et le comportement des mésons dans les différentes phases.

Enfin, voyons ce que donnent les critères mésoniques dans le cadre du modèle NJL.

8.3.5 Tracé du diagramme de phase dans le cadre du modèle NJL

Le critère d'élargissement des fonctions spectrales est tout aussi valable dans le modèle NJL que dans le modèle PNJL même si l'interprétation en terme de déconfinement est ici sujette à caution : le confinement est ici compris au sens du temps de vie (et donc de la largeur) des mésons, c'est-à-dire en terme d'interaction. On peut donc également tracer un diagramme

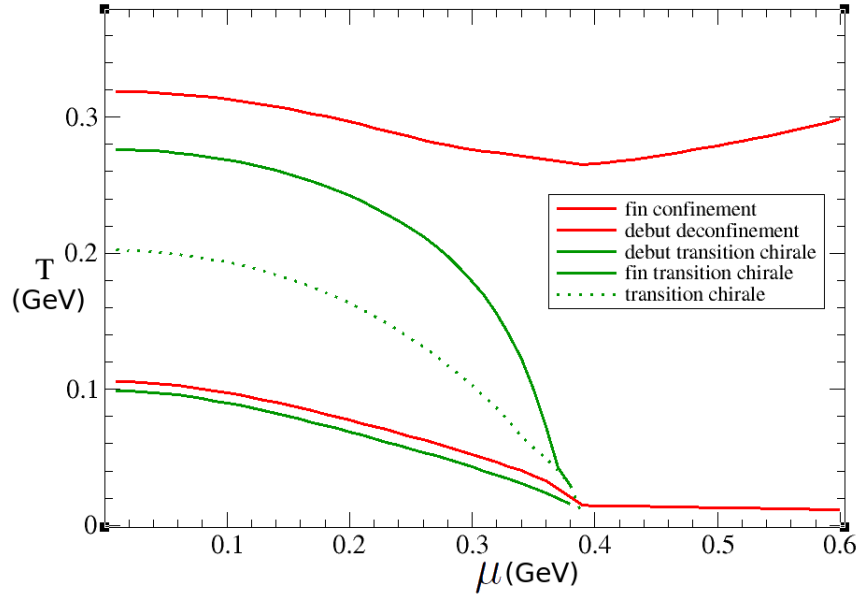


FIG. 8.25 – Diagramme de phase mésonique dans le cadre du modèle NJL.

de phase dans le cadre de ce modèle : voir figure 8.25. On constate que les deux transitions se font sur une gamme plus large de température : de 100 MeV à 275 MeV pour la transition chirale et de 105 MeV à 320 MeV pour la transition de déconfinement contre 195 MeV - 320 MeV et 200 MeV - 350 MeV pour le modèle PNJL. On retrouve le fait que le déconfinement au sens de l'interaction se produit tôt et de manière plus douce qu'en PNJL [82, 83]. La phase hadronique se trouve ainsi très restreinte, la zone de crossover apparaissant très tôt à mesure que la température augmente. On observe également, fait remarquable, une zone à haut potentiel chimique où la symétrie chirale est restaurée mais où le déconfinement (au sens de la modification des fonctions spectrales) n'est pas encore complètement à l'oeuvre. Les mésons se comportent donc, dès le modèle NJL, comme dans une phase confinée à symétrie chirale restaurée à haut potentiel chimique et basse température. On remarque d'ailleurs sur la figure 8.26 que dans la phase CCS, les fonctions spectrales du pion et du sigma sont tout aussi proches et tout aussi piquées qu'en PNJL.

Ce point doit être étudié d'une façon plus précise. En particulier, si l'on suppose que la phase CCS est le résidu à $N_c = 3$ de la phase quarkyonique [84], ce comportement *a priori* étonnant, le modèle NJL ne comportant pas d'élément permettant au confinement d'apparaître, fait écho à des travaux faisant état de la présence de la phase quarkyonique dans le modèle NJL [85]. Il est assez remarquable que ce critère très simple fasse apparaître une telle phase dès le modèle NJL. Le modèle PNJL ne ferait alors que délimiter

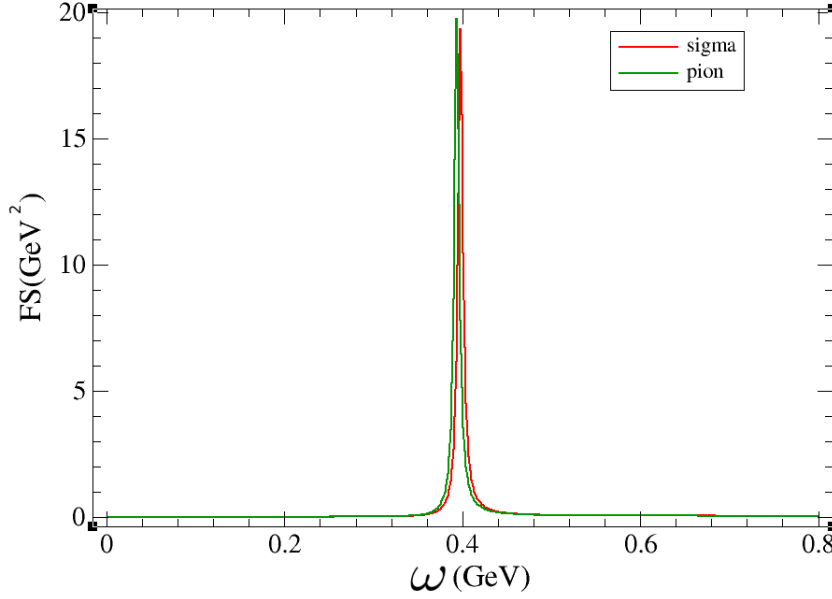


FIG. 8.26 – Fonctions spectrales du pion et du sigma pour $T = 40$ MeV et $\mu = 390$ MeV.

cette phase de manière plus quantitative, puisque dans ce dernier cas, les délimitations trouvées avec les critères mésoniques correspondent à celles trouvées en champ moyen.

8.3.6 Résumé

On a pu, grâce à l'étude de fonctions spectrales, trouver des critères mésoniques pertinents pour décrire les transitions chirale et de déconfinement. Ces critères sont respectivement la différence de masse entre les partenaires chiraux que sont le pion et le sigma et l'écart type de la fonction spectrale. On a pu ainsi délimiter les phases hadronique, de plasma et CCS et on a pu retrouver des délimitations semblables à celles obtenues en champ moyen. Les critères mésoniques s'appliquant également au cas NJL, on a pu délimiter les différentes phases sans faire appel à la boucle de Polyakov.

Phénomélogiquement, les conséquences pourraient être très importantes pour les expériences comme FAIR ou pour les études des étoiles compactes avec une transition de phase qui ne ressemble en rien à ce que l'on observe à $\mu = 0$ au LHC ou à RHIC.

8.4 Conclusion

En conclusion, il semble permis, au vu des résultats du modèle PNJL et de la comparaison NJL/PNJL, de penser que l'hypothétique phase quarkyonique se manifeste bien par une phase confinée et à symétrie chirale restaurée, tout cela devant être précisé par exemple en effectuant des calculs dans l'approximation où $N_c \rightarrow +\infty$ ou encore en appliquant d'autres outils tels que ceux employés lors de l'étude des phases inhomogènes de NJL [85].

Ce chapitre constitue intégralement un travail original excépté ce qui concerne l'approximation lorentzienne. L'idée de s'intéresser à l'écart-type vient de l'article [81]. L'idée de l'utiliser sur les fonctions spectrales et d'en faire un paramètre d'étude du déconfinement est originale.

Quatrième partie

Prise en compte des mésons vecteurs

Un moyen usuel d'étudier expérimentalement la transition entre le plasma de quark et de gluon et la matière hadronique ordinaire est de mesurer comment sont modifiées les propriétés des hadrons lorsqu'ils sont plongés dans un milieu dense et chaud. Si le hadron en question se désintègre dans le milieu avec un temps de vie inférieur à celui du plasma, obtenir des informations sur les produits de la désintégration permet de quantifier cette modification. On s'intéresse généralement à des produits de désintégration qui n'interagissent pas avec le plasma afin d'éviter toute distorsion du signal. Ces considérations font des leptons d'excellents candidats en tant qu'états finaux captés par les détecteurs. Ils permettent ainsi de mesurer les fonctions spectrales.

Produits par un processus électrofaible, ces leptons se couplent directement aux hadrons ayant les mêmes nombres quantiques que le photon [86]. Les mésons vecteurs satisfont cette condition et constituent donc des sondes très intéressantes du plasma. En particulier, le méson ρ a une durée de vie suffisamment courte pour se désintégrer dans le plasma. La largeur de sa fonction spectrale (liée au taux de production de dileptons) nous renseigne ainsi sur les propriétés du milieu formé.

Chapitre 9

Le modèle PNJL élargi aux mésons vecteurs

Afin de décrire le méson ρ dans le modèle PNJL, on doit étendre celui-ci en ajoutant une interaction dans le secteur vectoriel. Nous nous basons sur les études effectuées dans ce secteur dans le cadre du modèle NJL [87, 88].

9.1 Calcul de la masse du méson rho

9.1.1 Modification du lagrangien

On rajoute au lagrangien de PNJL le terme suivant :

$$-G_2[(\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2] \quad (9.1)$$

Le terme $(\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi)^2$ correspond à l'échange d'un mode isovecteuriel de nombres quantiques $J^{PC} = 1^{--}$ identifié au ρ et le terme $(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$ à l'échange d'un mode isovecteuriel de nombres quantiques $J^{PC} = 1^{++}$ identifié à la particule a_1 . Le premier terme rend donc compte d'un vertex vecteur-isovecteur et le second d'un vertex pseudovecteur-isovecteur.

9.1.2 Les fonctions de polarisation

Soit L le moment cinétique orbital et S le spin, le tableau suivant résume la nature des différents mésons étudiés ainsi que le vertex qui leur est associé [89] :

méson	L	S	J^P	I	vertex
π	0	0	0^- (pseudoscalaire)	1 (isovecteur)	$i\gamma_5\vec{\tau}$
σ	1	1	0^+ (scalaires)	0 (isoscalaire)	1
ρ	0	1	1^- (vecteur)	1 (isovecteur)	$\gamma_\mu\vec{\tau}$
a_1	1	1	1^+ (pseudovecteur)	1 (isovecteur)	$\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}$

P étant la parité et ayant pour valeur $(-1)^{L+1}$.

Les fonctions de polarisations des différents mésons s'écrivent ainsi [90] :

$$\Pi_{ab}^{PP}(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5 \tau_a S(p+q) i\gamma_5 \tau_b S(p)] \quad (9.2)$$

$$\Pi^{SS}(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(p+q)S(p)] \quad (9.3)$$

$$\Pi_{\mu\nu;ab}^{VV}(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu \tau_a S(p+q) \gamma_\nu \tau_b S(p)] \quad (9.4)$$

$$\Pi_{\mu\nu;ab}^{AA}(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_5 \tau_a S(p+q) \gamma_\nu \gamma_5 \tau_b S(p)] \quad (9.5)$$

V correspondant au vertex vecteur, A au vertex pseudovecteur, S au vertex scalaire et P au vertex pseudoscalaire [88]. De plus, il existe une polarisation Π^{AP} non nulle :

$$\Pi_{\mu;ab}^{AP}(q^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_5 \tau_a S(p+q) i\gamma_5 \tau_b S(p)], \quad (9.6)$$

son conjugué correspondant à Π^{PA} : $\Pi^{PA} = (\Pi^{AP})^*$.

9.1.3 Polarisation totale du méson ρ

On décompose Π^{VV} sur les tenseurs longitudinaux et transverses $L_{\mu\nu} = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$ et $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - L_{\mu\nu}$:

$$\Pi^{VV} = \Pi_L^{VV} L_{\mu\nu} + \Pi_T^{VV} T_{\mu\nu}. \quad (9.7)$$

On a $q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{VV} = 0$, d'où $\Pi_L^{VV} = 0$, la polarisation du méson ρ est donc purement transverse.

Pour calculer la polarisation totale, on utilise l'équation de Dyson. On obtient :

$$\tilde{\Pi}_T^{VV} = \Pi_T^{VV} - 2G_2 \Pi_T^{VV} \tilde{\Pi}_T^{VV} = \frac{\Pi_T^{VV}}{1 + 2G_2 \Pi_T^{VV}} \quad (9.8)$$

On procède alors de la même manière que lors de l'étude des mésons scalaires pour obtenir la masse du méson ρ .

9.1.4 Polarisation totale du méson a_1

On décompose également Π^{AA} sur les tenseurs longitudinaux et transverses. La partie transverse de la polarisation totale se calcule de la même manière que pour le méson ρ :

$$\tilde{\Pi}_T^{AA} = \Pi_T^{AA} - 2G_2\Pi_T^{AA}\tilde{\Pi}_T^{AA} = \frac{\Pi_T^{AA}}{1 + 2G_2\Pi_T^{AA}}. \quad (9.9)$$

La partie longitudinale fait, quant à elle intervenir les polarisations Π^{PP} et Π^{AP} :

$$\tilde{\Pi}_L^{AA} = \Pi_L^{AA} - 2G_2\Pi_L^{AA}\tilde{\Pi}_L^{AA} + 2G_1\Pi^{AP}\tilde{\Pi}^{PA}. \quad (9.10)$$

Ce mélange avec la polarisation du pion conduit à traiter les deux polarisations en question de manière commune.

9.1.5 Mélange des polarisations axiale et pseudoscalaire

En plus de 9.10, on a les relations suivantes :

$$\tilde{\Pi}^{PP} = \Pi^{PP} + 2G_1\Pi^{PP}\tilde{\Pi}^{PP} - 2G_2\Pi^{PA}\tilde{\Pi}^{AP} \quad (9.11)$$

et

$$\tilde{\Pi}^{PA} = \Pi^{PA} + 2G_1\Pi^{PP}\tilde{\Pi}^{PA} - 2G_2\Pi^{PA}\tilde{\Pi}^{AA}. \quad (9.12)$$

Enfin, $\Pi^{AP} = -\Pi^{PA}$, d'où $\tilde{\Pi}^{AP} = \tilde{\Pi}^{PA}$.

On résume ces relations grâce aux matrices suivantes :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi^{PP} & \Pi^{PA} \\ \Pi^{AP} & \Pi_L^{AA} \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 2G_1 & 0 \\ 0 & -2G_2 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

avec la décomposition de la matrice K en $K_1 + K_2$:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2G_2 \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Pour calculer la matrice $\tilde{\Pi}$ dont l'expression est la suivante :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Pi}^{PP} & \tilde{\Pi}^{PA} \\ \tilde{\Pi}^{AP} & \tilde{\Pi}_L^{AA} \end{pmatrix}, \quad (9.15)$$

on introduit la matrice $\hat{\Pi}$ qui s'écrit :

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}^{PP} & \hat{\Pi}^{PA} \\ \hat{\Pi}^{AP} & \hat{\Pi}_L^{AA} \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

$\hat{\Pi}$ a pour expression :

$$\hat{\Pi} = \Pi + \Pi K_2 \hat{\Pi} = (1 - \Pi K_2)^{-1} \Pi \quad (9.17)$$

et intervient dans l'expression de $\tilde{\Pi}$ dont on peut montrer qu'elle s'écrit :

$$\tilde{\Pi} = (1 - \hat{\Pi} K_1)^{-1} \hat{\Pi}. \quad (9.18)$$

Grâce à cette expression, on est en mesure de calculer les polarisations totales à partir des polarisations à une boucle. Détaillons désormais les expressions des polarisations à une boucle.

9.1.6 Calcul explicite des polarisations à une boucle

On exprime les polarisations à une boucle en fonction de I_1 et de $I_2(q)$, ces intégrales de boucles ayant pour expressions :

$$I_1 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (9.19)$$

et

$$I_2(q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+q)^2 - m^2][p^2 - m^2]}. \quad (9.20)$$

Pour cela, on utilise les propriétés suivantes : $\text{Tr}(\tau^a \tau^b) = N_f$; $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$; $\gamma_5^2 = 1$; $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$ ainsi que le fait que la trace du produit d'un nombre impair de matrices γ est nulle.

On obtient ainsi :

$$\Pi_{ab}^{PP}(q) = 4iN_c N_f \delta_{ab} \left[I_1 - \frac{q^2}{2} I_2(q) \right] \quad (9.21)$$

soit une réécriture de [5.42](#).

$$\Pi^{SS}(q) = 4iN_c N_f \delta_{ab} \left[I_1 - \frac{q^2 - 4m^2}{2} I_2(q) \right] \quad (9.22)$$

$$\Pi_{T,ab}^{VV}(q) = \frac{4}{3} iN_c N_f \delta_{ab} \left[(q^2 + 2m^2) I_2(q) - 2I_1 \right] \quad (9.23)$$

et

$$\Pi_{ab,\mu\nu}^{AA}(q) = \alpha g_{\mu\nu} + \Pi^{VV} \quad (9.24)$$

avec $\alpha = -4iN_c N_f \cdot 2m^2 I_2(q)$ d'où $\Pi_{ab,\mu\nu}^{AA}(q) = (\alpha + \Pi_T^{VV}) T_{\mu\nu} + \alpha L_{\mu\nu}$.

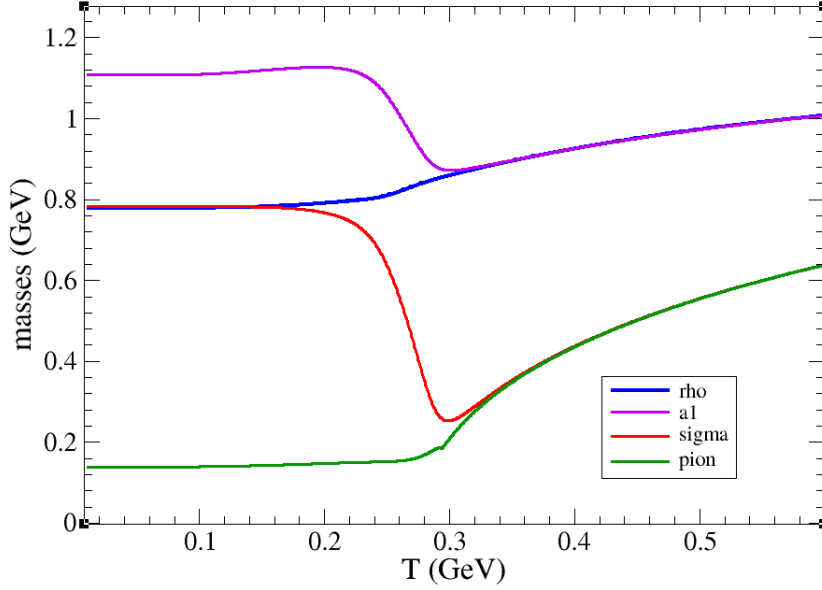


FIG. 9.1 – Évolution de la masse des mésons ρ , a_1 , π et σ en fonction de la température à $\mu = 0$

9.1.7 Les masses des mésons π , ρ et a_1

On peut désormais tracer la masse des différents mésons à $\mu = 0$ en fonction de la température voir figure 9.1. On garde le même jeu de paramètres que précédemment :

$$\begin{cases} \Lambda = 602,5 \text{ MeV} \\ m_0 = 5,8 \text{ MeV} \\ G = 2,38/\Lambda^2 \approx 6,56 \text{ GeV}^{-2}. \end{cases} \quad (9.25)$$

avec en plus : $G_2 = 1.1/\Lambda^2 \text{ GeV}^{-2}$. On obtien ainsi $m_\rho = 779 \text{ MeV}$ et $m_{a_1} = 1108 \text{ MeV}$ à $T = 0$ et $\mu = 0$. On constate que, de la même façon que pour les mésons scalaires et pseudo-scalaires, les masses des mésons ρ et a_1 se confondent à haute température, signe de la restauration chirale et du fait que ces mésons sont des partenaires chiraux. On constate également, qu'avec le jeu de paramètres utilisés, les masses des mésons ρ et σ sont très proches à température nulle. D'autres jeux de paramètres [91] donnent des masses différenciées.

On trace également l'évolution des différentes masses à $\mu = 390 \text{ MeV}$ figure 9.2. On constate que la discontinuité à la transition chirale se répercute également sur les mésons vecteurs.

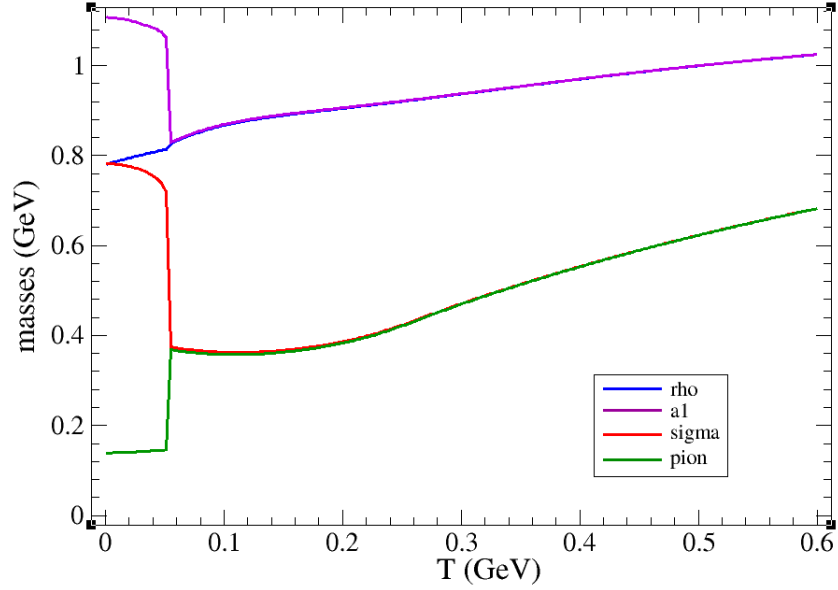


FIG. 9.2 – Évolution de la masse des mésons ρ , a_1 , π et σ en fonction de la température à $\mu = 390$ MeV.

9.2 Prise en compte des boucles de pion

Pour calculer la masse du ρ de manière plus précise, il convient de prendre en compte les boucles de pions [92] dans la propagateur du méson vecteur. Les interactions entre pions peuvent d'ailleurs fournir des informations sur la restauration chirale [93]. Pour cela, le calcul du vertex pion-quark-antiquark sera utile.

9.2.1 Le vertex pion-quark-antiquark

Commençons par développer l'expression du propagateur D associé au mélange des modes pseudoscalaire et axial grâce à l'équation de Dyson :

$$-iD = (iK) + (iK)(-i\Pi)(-iD) = (1 - \Pi K)^{-1}(iK) \quad (9.26)$$

En utilisant la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)$, on obtient :

$$-iD = \frac{2iG_1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & C \end{pmatrix}, \quad (9.27)$$

avec $\mathcal{D} = \det(1 - \Pi K)$, $A = 1 + 2G_2 \Pi_L^{AA}$, $B = 2iG_2 \Pi^{PA}$ et $C = -\frac{G_2}{G_1}(1 - 2G_1 \Pi^{PP})$.

On cherche ensuite à isoler la partie purement pseudoscalaire de ce propagateur. Pour cela, on diagonalise $-iD$. On utilise alors le fait que m_π^2

$$-i\Gamma^{\rho\pi\pi}(p, p') =$$

FIG. 9.3 – Amplitude du vertex "triangle" $\pi - \rho - \pi$ intervenant dans le calcul des boucles de pion [87].

est un pôle de $-iD$ donc que $\mathcal{D}(q^2 = m_\pi^2) = 0$, ce qui entraine $(AC - B^2)(q^2 = m_\pi^2) = 0$. On en déduit la valeur propre recherchée qui vaut $\frac{2iG_1}{\mathcal{D}}(A + C)$. Or on sait que $(-\frac{1}{iD})(q^2 = m_\pi^2) = 0$ donc par développement limité, $-\frac{1}{iD} = (q^2 - m_\pi^2) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q^2}(q^2 = m_\pi^2) \cdot \frac{1}{2iG_1(A + C)}$.

En posant

$$g_{\pi qq}^2 = -2G_1(1 + 2G_2\Pi_L^{AA})\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q^2}\right)^{-1}(q^2 = m_\pi^2) \quad (9.28)$$

et

$$g_{pv}^2 = -2G_2(1 - 2G_1\Pi^{PP})\frac{4m^2}{q^2}\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q^2}\right)^{-1}(q^2 = m_\pi^2), \quad (9.29)$$

on peut réécrire le propagateur de la manière suivante :

$$\left[ig_{\pi qq} - ig_{pv}\frac{\not{q}}{2m}\right] \otimes \left[ig_{\pi qq} + ig_{pv}\frac{\not{q}}{2m}\right] \frac{i}{q^2 - m_\pi^2}. \quad (9.30)$$

On en déduit le vertex πqq , en prenant également en compte le vertex purement pseudoscalaire $i\gamma_5\tau$ qui était déjà présent avant le mélange avec le mode axial :

$$\left(ig_{\pi qq} - ig_{pv}\frac{\not{q}}{2m}\right)(i\gamma_5\tau). \quad (9.31)$$

9.2.2 Polarisation du méson ρ avec boucles de pion

Nous sommes désormais en mesure de calculer la propagation du méson ρ en prenant en compte les boucles de pion. Pour cela, nous avons besoin de calculer l'amplitude $-i\Gamma^{\rho\pi\pi}(p, p')$ associée aux diagrammes de la figure 9.3. On applique les règles de Feynman en utilisant le vertex calculé en 9.31 et

on obtient :

$$-i\Gamma^{\rho\pi\pi}(p, p') = -2\frac{i}{\beta} \sum_n \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\left(ig_{\pi qq} + ig_{pv} \frac{\not{p}}{2m} \right) i\gamma_5 iS(k) \right. \\ \left. \left(ig_{\pi qq} - ig_{pv} \frac{\not{p}'}{2m} \right) i\gamma_5 iS(p' + k) \gamma_\mu iS(p + k) \right]. \quad (9.32)$$

qui se met sous la forme $-i\Gamma^{\rho\pi\pi}(p, p') = -iV_{\rho\pi\pi}(p, p') \times (p' + p)_\mu$ avec

$$V_{\rho\pi\pi}(p, p') = 4N_c(A_1 \times g_{\pi qq}^2 + A_2 \times 2g_{pv}g_{\pi qq} + A_3 \times g_{pv}^2). \quad (9.33)$$

Sachant que

$$A_1 = \frac{-4m_\pi^2 I_2(p) + (2q^2 - 4m_\pi^2)I_2(q) + 4m_\pi^4 I_3}{q^2 - 4m_\pi^2}, \quad (9.34)$$

$$A_2 = \frac{q^2 I_2(p) + (4m_\pi^2 - 2q^2)I_2(q) - 4m_\pi^4 I_3}{q^2 - 4m_\pi^2} \quad (9.35)$$

et

$$A_3 = \frac{I_1}{3m^2} + I_2(p) \frac{2q^2 - 4m_\pi^2}{4m_\pi^2 - q^2} - I_3 \frac{4m_\pi^4}{4m_\pi^2 - q^2} + \\ I_2(q) \frac{16m^2 m_\pi^2 - 10m^2 q^2 - 42m_\pi^4 - 4q^2 m_\pi^2 + q^4}{6m^2(4m_\pi^2 - q^2)}, \quad (9.36)$$

avec

$$I_3 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)((p' + k)^2 - m^2)((p + k)^2 - m^2)}. \quad (9.37)$$

Résultat différent de celui de [87]. Quelques étapes intermédiaires de ce long calcul sont données en Annexe C.

9.2.3 Conclusion

Ainsi, on a pu, en introduisant les vertex vecteurs dans le lagrangien, étendre le modèle à l'étude des mésons ρ et a_1 . On a alors pu tracer l'évolution de la masse de ces mésons en fonction de la température à différents potentiels chimiques. De plus, nous avons effectué les calculs analytiques permettant d'inclure les boucles de pions dans la propagation du ρ . Reste à effectuer les implémentations numériques.

Conclusion

En conclusion, ce travail a permis, à partir du modèle PNJL, de tracer le diagramme de phase de QCD à l'aide des paramètres d'ordre $\langle \bar{q}q \rangle$ et Φ , ceci pour différents choix de caractéristiques du modèle (potentiel polynomial ou logarithmique et cutoff fixé à Λ ou à $+\infty$). On a pu localiser les lignes de transitions chirale et de déconfinement et séparer la phase hadronique de la phase de QGP. En plus de cela, on a confirmé l'existence d'une nouvelle phase à haut potentiel chimique et basse température. Cette phase où la symétrie chirale est restaurée et où le confinement est réalisé a été nommée CCS comme "confined and chiral symmetric". Il apparaît que, lorsque le cutoff est fixé à $+\infty$, un déconfinement se produit à basse température pour les très hauts potentiels chimiques. Le modèle utilisé est néanmoins supposé perdre en validité dans ces régions éloignées de l'origine ($T = 0, \mu = 0$). Cet aspect demandera donc des confirmations de la part de modèles à validité plus étendue.

De plus, nous avons montré, chose *a priori* nouvelle, qu'à haut potentiel chimique, le déconfinement s'amorce progressivement dès les très faibles températures. Nous avons également détaillé la position du point critique dans le diagramme et l'étalement de la zone de métastabilité autour de la transition chirale de premier ordre.

Un sondage du diagramme directement à partir de quantités mésoniques à ensuite été effectué. Parmi de nombreuses possibilités, le choix du critère mésonique de déconfinement s'est porté sur l'écart-type de la fonction spectrale du sigma. Ce critère présente, en effet, la propriété intéressante de saturer à la fois dans la matière hadronique et dans le plasma. Le choix de la différence $m_\sigma - m_\pi$ comme critère de transition chirale s'est, par ailleurs, imposé très rapidement. On a pu, grâce à ces critères, retrouver des délimitations de phase proches de celles obtenues en champ moyen.

Nous avons également pu appliquer ces critères directement au modèle NJL sans boucle de Polyakov. Nous avons alors également mis en évidence la présence d'une phase CCS. Cette phase reste néanmoins difficile à délimiter avec le seul critère d'écart-type étant donnée la saturation de l'écart-type à haut potentiel chimique uniquement à haute température, signe de la présence du QGP, mais pas à basse température. On considère ainsi que la phase CCS est présente tant que la saturation à haute température n'est pas

atteinte. L'étude pourrait être approfondie en intégrant, par exemple, l'influence des di-quarks au modèle ou encore en utilisant des modèles décrivant la phase quarkyonique.

Enfin, nous avons amorcé la description du comportement du méson ρ dans les différentes phases étudiées. Le calcul du propagateur du ρ prenant en compte les boucles de pions a été effectué. Reste à décrire l'évolution de la fonction spectrale et de la masse du ρ en fonction de la température et du potentiel chimique.

Appendices

Annexe A

Transformations de Fierz

Une transformation de Fierz permet de réarranger les champs de fermions dans le lagrangien d'interaction [94]. Elle donne la relation entre $\bar{\Psi}_a(4)\Gamma_{ab}^k\Psi_b(1)\bar{\Psi}_c(3)\Gamma_{cd}^k\Psi_d(2)$ et $\bar{\Psi}_a(4)\Gamma_{ab}^k\Psi_b(2)\bar{\Psi}_c(3)\Gamma_{cd}^k\Psi_d(1)$, avec a, b, c et d des indices combinant les indices tensoriels, de saveur et de couleur. L'intérêt de cette transformation est d'établir le lien entre le terme direct et le terme d'échange : le terme direct calculé à partir du lagrangien après transformation de Fierz est, en effet, équivalent au terme d'échange calculé à partir du lagrangien original. Que l'on fasse le calcul à partir du lagrangien original \mathcal{L}_I , du lagrangien transformé $\mathcal{F}(\mathcal{L}_I)$ ou d'une combinaison des deux $\frac{\mathcal{L}_I + \mathcal{F}(\mathcal{L}_I)}{2}$, on trouve la même *self-energy*. Donc si le lagrangien original ne donne qu'un terme direct (*i.e.* le terme d'échange est nul), alors le lagrangien transformé donne seulement un terme d'échange et la combinaison donne la somme des deux. Ainsi, qu'on fasse l'approximation de Hartree-Fock (direct + échange) ou de Hartree seulement (terme direct seulement), on obtient la même *self-energy*.

Étudier la relation entre le terme original et le terme après transformation de Fierz revient à connaître les matrices de croisement c_{mk} reliant les matrices d'interaction $\Gamma_{ab}^k : \sum_k \Gamma_{cb}^k \Gamma_{da}^k = \sum_{k,m} c_{mk} \Gamma_{ca}^m \Gamma_{db}^m$. La matrice de croisement des indices de saveur relie donc les produit de vertex 1.1 et $\vec{\tau}.\vec{\tau}$ entre eux. Elle prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1.1 \\ \vec{\tau}.\vec{\tau} \end{pmatrix}_{fg',f'g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 \\ \vec{\tau}.\vec{\tau} \end{pmatrix}_{ff',gg'} \quad (\text{A.1})$$

Pour ce qui est des indices de spinoriels, on note :

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= 1_{\alpha\beta}1_{\alpha'\beta'} \\ p_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= (i\gamma_5)_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\alpha'\beta'} \\ v_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu)_{\alpha'\beta'} \\ a_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= (\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha'\beta'} \\ t_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} &= (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha'\beta'}. \end{aligned}$$

Et on montre que :

$$\begin{aligned}
s_{\alpha\beta',\alpha'\beta} &= \frac{1}{4}[s + v + \frac{1}{2}t - a - p]_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \\
p_{\alpha\beta',\alpha'\beta} &= -\frac{1}{4}[s - v + \frac{1}{2}t + a - p]_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \\
v_{\alpha\beta',\alpha'\beta} &= \frac{1}{4}[4s - 2v - 2a + 4p]_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} \\
a_{\alpha\beta',\alpha'\beta} &= -\frac{1}{4}[4s + 2v + 2a + 4p]_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}.
\end{aligned}$$

Or les termes d'interaction du modèle NJL $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ et $(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$ correspondent respectivement aux couplages $(s).(1.1)_{SU(2)}$ et $(p).(\vec{\tau}.\vec{\tau})$. On peut donc calculer la transformée de Fierz de $(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2\right] &= \frac{1}{8}\left[2(\bar{\Psi}\Psi)^2 + 2(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2 - 2(\bar{\Psi}\vec{\tau}\Psi)^2 - 2(\bar{\Psi}i\gamma_5\Psi)^2 \right. \\
&\quad \left. - 4(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)^2 - 4(\bar{\Psi}i\gamma_5\gamma^\mu\Psi)^2 + (\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\vec{\tau}\Psi)^2\right].
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Ici la transformation des indices de couleur n'a pas été prise en compte.

On constate que les termes vectoriels qui apparaissent après transformation ne correspondent pas aux termes du lagrangien d'interaction vectorielle [9.1](#). Le rajout explicite de ces termes dans le lagrangien vectoriel est donc justifié.

Annexe B

Pseudo-code du calcul de la température de début de la phase déconfinée

Ci-après est présenté le pseudo-code légèrement simplifié du calcul de la température de début de la phase déconfinée :

Fonction `température_début_déconfinement (mu)=`

(à chaque potentiel chimique, on associe une température de manière à tracer une courbe sur le diagramme de phase)

`maxi = écart-type(mu; T=0.6)`

`mini = écart-type(mu; T=0.01)`

(calcul des bornes)

`hauteur = maxi-((maxi-.mini)*.0.02)`

(calcul de l'ordonnée au delà de laquelle on considère que le déconfinement est réalisé)

`Solution = T telle que écart-type(T) = hauteur`

(calcul de la température associée à cette ordonnée)

Annexe C

Calcul du diagramme à boucles de pion

C.1 Développement du produit

Pour calculer l'expression 9.32, on développe le produit à l'intérieur de la trace. Le dénominateur à l'intérieur de l'intégrale vaut $Den = (k^2 - m^2)((p' + k)^2 - m^2)((p + k)^2 - m^2)$. Pour calculer le numérateur, on sépare les termes en trois catégories : ceux comportant deux matrices γ , ceux en comportant quatre et ceux en comportant six.

Les termes à deux matrices γ s'écrivent :

$$\begin{aligned} & -4g_{\pi qq}^2 m^2 (p_\mu + k_\mu) - 4g_{\pi qq}^2 m^2 (p'_\mu + k_\mu) + 4g_{\pi qq}^2 m^2 k_\mu \\ & + 4m^3 g_{\pi qq} \frac{g_{pv}}{2m} \left(\frac{p'_\mu}{p'} + \frac{p_\mu}{p} \right). \end{aligned} \quad (C.1)$$

Les termes à quatre matrices γ sont les suivants :

$$\frac{g_{pv}^2}{4pp'} p_\nu k_\rho p'_\sigma tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) \quad (C.2)$$

$$- \frac{g_{pv} g_{\pi qq}}{2p} p_\nu k_\rho (p'_\sigma + k_\sigma) tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) \quad (C.3)$$

$$- \frac{g_{pv} g_{\pi qq}}{2p} p_\nu k_\rho (p_\sigma + k_\sigma) tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.4)$$

$$- \frac{g_{pv}^2}{4pp'} p_\nu p'_\rho (p'_\sigma + k_\sigma) tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) \quad (C.5)$$

$$- \frac{g_{pv}^2}{4pp'} p_\nu p'_\rho (p_\sigma + k_\sigma) tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.6)$$

$$- \frac{g_{pv} g_{\pi qq}}{2p'} p'_\rho k_\nu (p'_\sigma + k_\sigma) tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu) \quad (C.7)$$

$$-\frac{g_{pv}g_{\pi qq}}{2p'}p'_\rho k_\nu(p_\sigma + k_\sigma)tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.8)$$

$$g_{\pi qq}^2 k_\nu(p_\sigma + k_\sigma)(p'_\sigma + k_\sigma)tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.9)$$

$$\frac{g_{pv}g_{\pi qq}}{2p'}p'_\nu(p'_\rho + k_\rho)(p_\sigma + k_\sigma)tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.10)$$

$$\frac{g_{pv}g_{\pi qq}}{2p}p_\nu(p'_\rho + k_\rho)(p_\sigma + k_\sigma)tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \quad (C.11)$$

Il reste, pour finir, un terme à six matrices γ :

$$\frac{g_{pv}^2}{4m^2 pp'}p_\nu k_\rho p'_\sigma(p'_\alpha + k_\alpha)(p_\beta + k_\beta)tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) \quad (C.12)$$

C.2 Calcul des traces

On développe les termes précédents en utilisant les relations suivantes :

$$tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) = 4(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\rho\mu}) \quad (C.13)$$

et

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) = & 4(g^{\nu\rho}g^{\sigma\alpha}g^{\mu\beta} - g^{\nu\rho}g^{\sigma\mu}g^{\alpha\beta} + \\ & g^{\nu\rho}g^{\sigma\beta}g^{\alpha\mu} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\alpha}g^{\mu\beta} + g^{\nu\sigma}g^{\rho\mu}g^{\alpha\beta} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\beta}g^{\alpha\mu} + \\ & g^{\nu\alpha}g^{\rho\sigma}g^{\mu\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\rho\mu}g^{\sigma\beta} + g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}g^{\sigma\mu} - g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta} + \\ & g^{\nu\mu}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta} - g^{\nu\mu}g^{\rho\beta}g^{\sigma\alpha} + g^{\nu\beta}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\mu} - g^{\nu\beta}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\mu} + g^{\nu\beta}g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}). \end{aligned} \quad (C.14)$$

Le numérateur dans l'intégrale s'écrit ainsi : $B_1 p_\mu + B_2 p'_\mu + B_3 k_\mu$ avec

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{g_{pv}^2}{m^2}(-m_\pi^2(k^2 + m^2) + p'.k(m^2 - k^2)) + \\ & 4g_{\pi qq}^2(k.(p' + k) - m^2) + 2g_{pv}g_{\pi qq}(m^2 - k^2 - 2p'.k + m_\pi^2), \end{aligned} \quad (C.15)$$

$$\begin{aligned} B_2 = & \frac{g_{pv}^2}{m^2}(-m_\pi^2(k^2 + m^2) + p.k(m^2 - k^2)) + \\ & 4g_{\pi qq}^2(k.(p + k) - m^2) + 2g_{pv}g_{\pi qq}(m^2 - k^2 - 2p.k + m_\pi^2) \end{aligned} \quad (C.16)$$

et

$$\begin{aligned} B_3 = & \frac{g_{pv}^2}{m^2}(-3m^2 p.p' + p.k(4p'.k + 2m_\pi^2) - p.p'k^2 + 2m_\pi^2 k.p' + m_\pi^4) + \\ & 4g_{\pi qq}^2(k^2 - p.p' - m^2) + 2g_{pv}g_{\pi qq}(4p.p'). \end{aligned} \quad (C.17)$$

C.3 Calcul des intégrales

Reste, après développement des traces et factorisation des termes obtenus, à exprimer les intégrales intervenant dans l'expression à calculer en fonction de I_1 , I_2 et I_3 .

On aboutit ainsi aux égalités suivantes :

$$\int \frac{k_\mu}{Den} = \frac{1}{4m_\pi^2 - q^2} [I_2(p') - I_2(q) - m_\pi^2 I_3] (p_\mu + p'_\mu), \quad (C.18)$$

$$\int \frac{k_\mu k^2}{Den} = -\frac{1}{2} (p_\mu + p'_\mu) I_2(q) + \frac{m^2}{4m_\pi^2 - q^2} [I_2(p') - I_2(q) - m_\pi^2 I_3] (p_\mu + p'_\mu), \quad (C.19)$$

$$\int \frac{k_\mu p \cdot k}{Den} = -\frac{p'_\mu}{4} I_2(p') + \frac{1}{4} (p_\mu + p'_\mu) I_2(q) - \frac{m_\pi^2}{2(4m_\pi^2 - q^2)} [I_2(p') - I_2(q) - m_\pi^2 I_3] (p_\mu + p'_\mu), \quad (C.20)$$

$$\int \frac{k_\mu p' \cdot k}{Den} = -\frac{p_\mu}{4} I_2(p) + \frac{1}{4} (p_\mu + p'_\mu) I_2(q) - \frac{m_\pi^2}{2(4m_\pi^2 - q^2)} [I_2(p') - I_2(q) - m_\pi^2 I_3] (p_\mu + p'_\mu), \quad (C.21)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{k_\mu (p \cdot k) (p' \cdot k)}{Den} &= (p_\mu + p'_\mu) \left[\frac{I_1}{12} + I_2(p) \frac{6m_\pi^4 - q^2 m_\pi^2}{8(4m_\pi^2 - q^2)} + \right. \\ &\quad \left. I_2(q) \left(\frac{2q^2 - pm_\pi^2 - 2m^2}{24} - \frac{2m_\pi^4}{4m_\pi^2 - q^2} \right) - I_3 \frac{m_\pi^6}{4(4m_\pi^2 - q^2)} \right]. \end{aligned} \quad (C.22)$$

On en déduit l'expression [9.33](#).

Bibliographie

- [1] the STAR Collaboration. White paper. Nucl.Phys. A 757 102, 2005.
- [2] L. McLerran. Theory summary : Quark matter 2006. arXiv :hep-ph/0702004v1, 2007.
- [3] Peter Braun-Munzinger and Johanna Stachel. The quest for the quark-gluon plasma. Nature, 448 :302–309, 2007.
- [4] Kenji Fukushima and Tetsuo Hatsuda. The phase diagram of dense QCD. Rept.Prog.Phys., 74 :014001, 2011.
- [5] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, and K.K. Szabo. The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. Nature, 443 :675–678, 2006.
- [6] Sourendu Gupta, Xiaofeng Luo, Bedangadas Mohanty, Hans Georg Ritter, and Nu Xu. Scale for the Phase Diagram of Quantum Chromodynamics. Science, 332 :1525–1528, 2011.
- [7] F. Gelis. Color glass condensate and glasma. arXiv :1009.0093v2, 2010.
- [8] J. D. Bjorken. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions : the central rapidity region. Physical review D Volume 27, 1982.
- [9] in2p3.fr/ires/recherche/alice/documents/hdr/chapitre1.ps.
- [10] U. Heinz U. A. Wiedemann. Particle Interferometry for Relativistic Heavy-Ion Collisions. Phys. Rep. 319, 1999.
- [11] Rajeev S. Bhalerao and Rajiv V. Gavai. Heavy ions at lhc : A quest for quark-gluon plasma. arXiv :0812.1619v1, 2008.
- [12] Michael J. Leitch. Latest results on the hot-dense partonic matter at rhic. arXiv :nucl-ex/0610015v1, 2006.
- [13] H. Niemia G.S. Denicolc P. Huovinenc E. Moln and D.H. Rischke. Influence of a temperature-dependent shear viscosity on the azimuthal asymmetries of transverse momentum spectra in ultrarelativistic heavy-ion collisions. arXiv :1203.2452v1, 2012.
- [14] W.M. Alberico S. Chiacchiera H. Hansen A. Molinari and M. Nardi. Shear viscosity of quark matter. arXiv :0707.4442v1, 2007.
- [15] R. Baier Y.L. Dokshitzer A.H. Mueller D. Schiff. Angular Dependence of the Radiative Gluon Spectrum and the Energy Loss of Hard Jets in QCD Media. Phys. Rev. C60, 1999.

- [16] M. Plümer X.-N. Wang, M. Gyulassy. The LPM effect in QCD and Radiative energy loss in a quark-gluon plasma. Phys. Rev. D51, 1995.
- [17] X.-N. Wang. Systematic Study of High p_T Hadron Spectra in pp, pA and AA Collisions from SPS to RHIC Energies. Phys. Rev. C61, 2000.
- [18] D. d’Enterria, 2007.
- [19] Eugenio Scapparone on behalf of the ALICE Collaboration. Latest results from alice. arXiv :1111.2685v1, 2011.
- [20] M. Gyulassy D. H. Rischke. The Maximum Lifetime of the Quark–Gluon Plasma. Nucl. Phys A597, 1996.
- [21] E. Shuryak M. Stephanov, K. Rajagopal. Signatures of the Tricritical Point in QCD. Phys. Rev. Lett 81, 1998.
- [22] J. D. Bjorken. Disoriented Chiral Condensate : Theory And Phenomenology. Acta Phys. Polon. B23, 1992.
- [23] G. Agakichiev et al. Low-mass e+e- pair production in 158A GeV Pb-Au collisions at the CERN SPS, its dependence on multiplicity and transverse momentum. Phys. Lett. B422, 1998.
- [24] M. M. Aggarwal et al. Three-Pion Interferometry Results from Central Pb+Pb Collisions at 158 A GeV/c. Phys. Rev. Lett. 85, 2000.
- [25] H. Satz T. Matsui. $J\psi$ Supression by QGP formation. Phys. Lett. B178, 1986.
- [26] H.Satz F. Karsch, M.T. Mehr. Color Screening and deconfinement for bound states of heavy quarks. Z. Phys, 1988.
- [27] B. Delamotte. Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de poincaré, 1997.
- [28] F.E. Close. An introduction to Quarks and Partons. Ed. Academic Press, 1979.
- [29] D.B. Lichtenberg. Unitary Symmetry and Elementary Particles. Ed. Academic Press, 1978.
- [30] M. Gell-Mann. Isotopic spin and new unstable particles. Departement of Physics and Institute for Nuclear Studies, University of Chicago, Illinois, 1953.
- [31] Jonathan L. Rosner. The eightfold way. arXiv hep-ph/0109241, 2001.
- [32] S. Sakata. On a composite model for the new particules. Prog. Theor. Phys. (Kyoto), 1956.

- [33] A. Deandrea. Introduction à l'interaction forte, 2007.
- [34] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. California Institute of Technology, Pasadena, California, 1964.
- [35] A. Pich. Quantum Chromodynamics. arXiv :hep-ph/9505231, 1995.
- [36] O. Pène. Qcd sans peine, 2005.
- [37] P. Nason. Introduction to qcd.
- [38] V. Abazov D0 Collaboration. Measurement of the dijet invariant mass cross section in proton anti-proton collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV. arXiv :1002.4594v2, 2010.
- [39] R. Gupta. Introduction to lattice QCD, 1997.
- [40] J. Goldstone A. Salam S. Weinberg. Broken symmetries. Phys. Rev. Volume 123, 1962.
- [41] K. Myneni. Symmetry destroyed : the failure of parity, 1984.
- [42] P. Costa M.C.Ruivo C.A. de Sousa H. Hansen. Phase Diagram and Critical Properties within an Effective Model of QCD : The Nambu–Jona-Lasinio Model Coupled to the Polyakov Loop. Symmetry, 2010.
- [43] G. Chanfray. QCD and Symmetries related to nucleon structure and strongly interactiong matter.
- [44] S. Leupold V. Metag and U. Mosel. Hadrons in strongly interacting matter. arXiv :0907.2388v1, 2009.
- [45] V. Bernard A. H. Blin B. Hiller Y. P. Ivanovic A. A. Osipov U.-G. Meissner. Pion observables in the extended njl model with vector and axial-vector mesons. arXiv :hep-ph/9506309v1, 1995.
- [46] R. Alkofer and H. Reinhardt. Tübingen university and egyptian-german spring school lectures, 1995.
- [47] B.-J. Schaefer J.M. Pawłowski and J. Wambach. The phase structure of the polyakov–quark-meson model. arXiv :0704.3234v2, 2007.
- [48] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. Phy. Rev. 122, 1960.
- [49] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. Phy. Rev. 124, 1961.

- [50] T. Kunihiro and T. Hatsuda. A self-consistent mean-field approach to the dynamical symmetry breaking – the effective potential of the nambu and jona-lasinio model. Progress of Theoretical Physics, Vol. 71, No. 6, 1984.
- [51] U. Vogl and W. Weise. The nambu and jona-lasinio model : its implications for hadrons and nuclei.
- [52] T. Hatsuda and T. Kunihiro. Pion and sigma-meson at finite temperature. KEK-TH 159 Preprint 87-3, 1987.
- [53] D Schroeder M. Peskin. An introduction to Quantum Field Theory. Addiso-Wesley Publishing Company, 1996.
- [54] M. Asakawa and K. Yazaki. Chiral restoration at finite density and temperature. Nucl. Phys. A504 668-684, 1989.
- [55] P. Rehberg and S.P. Klevansky. One loop integrals at finite temperature and density. Phys. Lett. B591, 277 (2004) arXiv 0310121, 2004.
- [56] P. Rehberg J. Hüfner, S.P. Klevansky. Soft deconfinement - critical phenomena at the Mott transition in a field theory for quarks and mesons. Nuclear Physics A, 1996.
- [57] V. Dmitrasinovic H.-J. Schulze R. Tegen and R.H. Lemmer. Chirally symmetric $o(1/nc)$ corrections to the nambu–jona-lasinio model. Annals of physics 238, 332-369, 1995.
- [58] R.S.Wiley. Ambiguity of calculations in the NJL model and its singular relation to the linear sigma model. Physical Review D, 1993.
- [59] [http : //www – np.ucy.ac.cy/HADES/physics/physics_main.html](http://www-np.ucy.ac.cy/HADES/physics/physics_main.html).
- [60] K. Fukushima. Thermodynamic limit of the canonical partition function with respect to the quark number in qcd. Ann. Phys. 304, 72, 2003.
- [61] P. Costa M.C. Ruivo C.A. de Sousa H. Hansen and W.M. Alberico. Scalar-pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in su(3) pnjl model. Phys.Rev. D D79, 116003, 2009.
- [62] Kenji Fukushima. Chiral effective model with the Polyakov loop, pnjl. Phys. Lett., B591 :277–284, 2004.
- [63] C. Ratti M.A. Thaler and W. Weise. Phases of QCD, lattice thermodynamics and a field theoretical model. arXiv 0506234v2, 2006.
- [64] Yuji Sakai Kouji Kashiwa Hiroaki Kouno and Masanobu Yahiro. Phase diagram in the imaginary chemical potential region and extended z3 symmetry. arXiv :0803.1902v2, 2008.

- [65] P. Costa M. C. Ruivo C. A. de Sousa H. Hansen. Phase diagram and critical properties within an effective model of qcd : the nambu–jona-lasinio model coupled to the polyakov loop. arXiv :1007.1380v1, 2010.
- [66] P. Zhuang J. Hüfner S.P. Klevansky. Thermodynamics of a quark-meson plasma in the nambu–jona-lasinio model. Nucl. Phys. A 576 525-552, 1994.
- [67] M. Buballa. Njl-model analysis of dense quark matter. Physics Reports 407 205-376, 2005.
- [68] M.C. Ruivo P. Costa H. Hansen and C.A. de Sousa. Exploring the role of model parameters and regularization procedures in the thermodynamics of the pnjl model. arXiv :1001.3077v1, 2010.
- [69] H. Hansen W.M. Alberico A. Beraudo A. Molinari M. Nardi and C. Ratti. Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop. Physical Review D 75, 065004, 2007.
- [70] Misha A. Stephanov, K. Rajagopal, and Edward V. Shuryak. Event-by-event fluctuations in heavy ion collisions and the QCD critical point. Phys.Rev., D60 :114028, 1999.
- [71] Z. Fodor and S.D. Katz. Critical point of QCD at finite T and mu, lattice results for physical quark masses. JHEP, 0404 :050, 2004.
- [72] O. Scavenius, A. Mocsy, I.N. Mishustin, and D.H. Rischke. Chiral phase transition within effective models with constituent quarks. Phys.Rev., C64 :045202, 2001.
- [73] M. Frank, M. Buballa, and M. Oertel. Flavor mixing effects on the QCD phase diagram at nonvanishing isospin chemical potential : One or two phase transitions? Phys.Lett., B562 :221–226, 2003.
- [74] P. Costa C.A. De Sousa M.C. Ruivo H. Hansen. The QCD critical end point in the PNJL model.
- [75] P. Costa M.C. Ruivo and C.A. de Sousa. Thermodynamics and critical behavior in the nambu–jona-lasinio model of qcd. arXiv :0801.3417v2, 2008.
- [76] A. Andronic D. Blaschke P. Braun-Munzinger J. Cleymans K. Fukushima L.D. McLerran H. Oeschler R.D. Pisarski K. Redlich C. Sasaki H. Satz and J. Stachel. Hadron production in ultra-relativistic,nuclear collisions : Quarkyonic matter and a triple point in the phase diagram of qcd. Nucl. Phys. A837 65-86, 2010.

- [77] Bengt Friman Chihiro Sasaki and Krzysztof Redlich. Effective chiral model with polyakov loops and its application to hot/dense medium. [arXiv :hep-ph/0703191v1](#), 2007.
- [78] H. Abuki R. Anglani R.Gatto G. Nardulli and M. Ruggieri. Chiral crossover, deconfinement and quarkyonic matter within a nambu-jona lasinio model with the polyakov loop. [arXiv :0805.1509v2](#), 2008.
- [79] B. Stokic B. Friman and K. Redlich. Kurtosis and compressibility near the chiral phase transition. [Physic Letters B 673 192-196](#), 2009.
- [80] F. Karsch S. Ejiri and K. Redlich. Hadronic fluctuations in the qgp. [arXiv :hep-ph/0510126v1](#), 2005.
- [81] S. Ejiri F. Karsch and K. Redlich. Hadronic fluctuations at the qgp phase transition. [arXiv :hep-ph/0509051v1](#), 2005.
- [82] P. Costa M. C. Ruivo C. A. de Sousa H. Hansen and W.M. Alberico. Scalar-pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in su(3) pnjl model. [arXiv :0807.2134v3](#), 2009.
- [83] P. Costa C. A. de Sousa M. C. Ruivo H. Hansen and W.M. Alberico. Scalar-pseudoscalar meson spectrum in su(3) pnjl model. [arXiv :0907.1972v1](#), 2009.
- [84] L. McLerran K. Redlich and C. Sasaki. Quarkyonic matter and chiral symmetry breaking. [Nucl. Phys. A 824 86-100](#), 2009.
- [85] S. Carignano and M. Buballa. Inhomogeneous islands and continents in the nambu-jona-lasinio model. [arXiv :1111.4400v2](#), 2012.
- [86] G. Chanfray. QCD and symmetries related to nucleon structure and strongly interacting matter. [cenbg.in2p3.fr/heberge/EcoleJoliotCurie/coursannee/cours/Chanfray2010.pdf](#), 1998.
- [87] Y.B. He J. Hufner S.P. Klevansky and P.Rehberg. $\pi\pi$ scattering in the ρ -meson channel at finite temperature. [Institut fur Theoretische Physic, Heidelberg](#), 1997.
- [88] S.P. Klevansky and R.H. Lemmer. Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory. [arXiv 9707206v1](#), 1997.
- [89] V. Koch. Introduction to chiral symmetry. [nucl-th/9512029](#), 1995.
- [90] M. Oertel. Investigation of meson loop effects in the nambu-jona-lasinio model. [arXiv :hep-ph/0012224v1](#), 2000.

- [91] J-J Schulze. The pion form factor at zero and finite temperature in the nambu-jona-lasinio model. J. Phys. G :Nucl. Part. Phys. 531-548, 1993.
- [92] A. Polleri R.A. Broglia P.M. Pizzochero N.N. Scoccola. Rho meson properties in the nambu-jona-lasinio model. Z. Phys. A 357, 325-331, 1997.
- [93] D. Davesne Y.J. Zhang G. Chanfray and J. Wambach. In medium pion-pion interaction and chiral symmetry restoration. arXiv :nucl-th/0002032v1, 2000.
- [94] S.P. Klevansky. The nambu-jona-lasinio model of quantum chromodynamics. Reviews of Modern Physics, Vol. 64, No. 3, 1992.